ABC 105 解説

drafear, E869120, square1001, DEGwer

2018 年 8 月 11 日

A: AtCoder Crackers

N が K の倍数の時、均等に配ることができるので答えは 0 です。そうでない場合、答えを 0 にはできず、また N を K で割った商とあまりをそれぞれ A, B として、B 人に $A+1$ 枚、$K-B$ 人に A 枚のせんべいを配ればよく、よって答えは 1 です。

C++ では $true, false$ がそれぞれ $0, 1$ に対応することを用いれば、以下のように実装することもできます。

```
#include<stdio.h>
int main()
{
        int a, b;
        scanf("%d%d", &a, &b);
        printf("%d\n", a%b != 0);
}
```

B: Cakes and Donuts

解法 1：全パターン探す

ケーキとドーナツ合計で N 円ということは, ケーキの個数は 0 個以上 $N/4$ 個以下、ドーナツの個数は 0 個以上 $N/7$ 個以下ということが分かります。

この個数の範囲で、ケーキの個数 A ドーナツの個数 B を全探索すればよいです。$4A+7B=N$ となるような (A, B) の組があれば "Yes", なければ "No" を出力すればよいです。

解法 2：数学的に解く

実は、答えが "No" となるのは $N = 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 13, 17$ の場合のみですので、if 文を用いて場合分けして解くことができます。

証明：まず N が 21 以上の場合に、答えが必ず "Yes" であることを証明します。まず、$N-0, N-7, N-14, N-21$ (それぞれドーナツを $0, 1, 2, 3$ 個買う場合) のうち 4 の倍数であるものは必ず 1 つあります。これを選べば、残りをすべてケーキにすることで適切に買うことができます。N が 20 以下の場合は、「解法 1」の方法で証明することもできますが、実際には表などを使って手計算でやる方が簡単です。

サンプルコード (C++)

解法 1：https://beta.atcoder.jp/contests/abc105/submissions/2990812
解法 2：https://beta.atcoder.jp/contests/abc105/submissions/2991021

C: Base -2 Number

N の -2 進表記の $(-2)^i$ の桁に現れる整数を S_i とします。このとき、S_0 以外の決め方が N を 2 で割ったあまりに影響することはないので、S_0 は N が奇数の時 1 で、そうでないとき 0 にする必要があります。

S_0, S_1 以外の決め方が N を 4 で割ったあまりに影響することはないので、S_0 が決まっている状況下では S_1 も決まります。このようにして、順次各々の S_i の値を決めて行くことができます。また、-2 進 K 桁の数が表すことのできる整数の範囲を考えれば、この繰り返しは高々 $O(\log N)$ 回で終了することも分かり、この問題を解くことができます。

D: Candy Distribution

数列 A に対し、A の先頭 i 項の和を B_i とします。なお、便宜上 $B_0 = 0$ としておきます。

いま、$A_l + ... + A_r = B_r - B_{l-1}$ であり、$A_l + ... + A_r$ が M の倍数であることは B_r, B_{l-1} を M で割ったあまりが等しいことと同値です。よって、数えるべきは、B_i, B_j が $\bmod M$ で等しいような $0 \leq i < j \leq N$ の組の個数です。

これは、各 $x = 0, ..., M-1$ について、B_i を M で割ったあまりが x であるような i の個数を求めておくことで計算可能です。M は大きいので長さ M の配列を持つことはできませんが、平衡二分木 (C++ なら std::map) やハッシュマップ (C++ なら std::unordered_map) を用いることで「B_i を M で割ったあまりが x であるような i が存在するような x」についてのみ値を持っておくことができます。この工夫を用いれば計算量が ($O(N \log N)$ や乱択 $O(N)$ 時間に) 改善でき、この問題を解くことができます。