ABC 159 解説

writer: DEGwer, kyopro_friends, latte0119, namonakiacc,
satashun, tempura0224, tozangezan, yokozuna57

2020 年 3 月 22 日

For International Readers: English editorial starts on page 7.

A: the number of even pairs

選んだ 2 つのボールに書かれている数の和が偶数になるのは、 2 つのボールに書かれている数が共に偶数であるか、共に奇数である場合に限ります。したがって、そのようなボールの選び方の数を求めればよいです。これは、 $\binom{N}{2} + \binom{M}{2}$ 通りです。以下は C++ における実装例です。

```
#include<iostream>
using namespace std;

int main(){
    int N,M;
    cin>>N>>M;

    cout<<N*(N-1)/2+M*(M-1)/2<<endl;
    return 0;
}
```

B: Strong Palindrome

文字列 S の 長さを N とします。
S, S の 1 文字目から $\frac{N-1}{2}$ 文字目, S の $\frac{N+3}{2}$ 文字目から N 文字目 がすべて回文であるかどうかを調べ、すべてが回文であるときに "Yes" , そうでないときに "No" を出力すればよいです。
S が回文であるかどうかを調べる方法としては例えば以下の方法などがあります。

1. すべての i $(1 \leq i \leq N)$ について、S の i 文字目と S の $(N-i-1)$ 文字目が等しいことを確認する。
2. S を反転した文字列と S が等しいかどうかを調べる。

C++ での実装例：https://atcoder.jp/contests/abc159/submissions/11091525

C: Maximum Volume

縦、横、高さをそれぞれ a, b, c とおくと、$a + b + c = L$ をみたす中で abc を最大化する問題となります。

相加相乗平均不等式より、$(abc)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{a+b+c}{3}$、すなわち $abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$ です。等号成立条件は $a = b = c$ です。

よって、$a = b = c = \frac{L}{3}$ のとき体積最大となり、その時の体積は $\frac{L^3}{27}$ となります。

Listing 1　C++ での実装例

```
#include <stdio.h>
int main(){
        int L;
        scanf("%d",&L);
        printf("%.12f\n",(double)L*L*L/27);
}
```

D: Banned K

$i = 1, 2, ..., N$ に対して、 $c_i := \#\{1 \leq j \leq N | A_j = i\}$ と定義します。
$k (1 \leq k \leq N)$ を 1 つ固定して考えます。 k に対する問題の答えは、

- N 個のボールから、書かれている整数が等しいような異なる 2 つのボールを選び出す方法の数
- k 番目のボールを除いた $N-1$ 個のボールから、 k 番目のボールと同じ整数が書かれたボールを選び出す方法の数

をそれぞれ求めて、前者から後者を引けば求まります。

前者は、 $\sum_{i=1}^{N} \binom{c_i}{2}$, 後者は $c_{A_k} - 1$ となります。　前者の値は k によらないので、事前に $O(N)$ で計算しておけばよいです。後者は、各 k に対して $O(1)$ で求められます。

以上より、この問題を $O(N)$ で解くことができました。

E: Dividing Chocolate

もし「縦方向にしか割れない」という条件があれば、左端から順に貪欲にとることで問題を解くことができます。よって、「横方向にどう割るか」を 2^{H-1} 通り全探索し、それぞれの場合について「縦方向にしか割れない」問題を解けばよいです。計算量は $O(2^H HW)$ です。

F: Knapsack for All Segments

求めたい合計値は、

$a_{x_1} + a_{x_2} + \cdots + a_{x_k} = S$, $L \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_k \leq R$ をみたすような $(L, x_1, x_2, \ldots, x_k, R)$ の組の個数

と言い換えることができます。

これは

$dp[i][s][t] =$ i 番目までみて、選んだ要素の和が s で、
L をまだ決めていない状態の場合の数 ($t = 0$ のとき)
L は決めたが R はまだ決めていない状態の場合の数 ($t = 1$ のとき)
L も R も決まっている状態の場合の数 ($t = 2$ のとき)

と定めて動的計画法を用いると、時間計算量、空間計算量ともに $O(NS)$ で計算することができます。

求めるものは $dp[N][S][2]$ です。

遷移等については実装例を参考にしてください。https://atcoder.jp/contests/abc159/submissions/11096062

A: the number of even pairs

The sum of integers on the chosen two balls is an even number only if the integers on the two balls are both even numbers, or both odd numbers. Therefore, it is enough to find the number of such ways of choosing. This is equal to $\binom{N}{2} + \binom{M}{2}$. The following is a sample code in C++.

```
#include<iostream>
using namespace std;

int main(){
    int N,M;
    cin>>N>>M;

    cout<<N*(N-1)/2+M*(M-1)/2<<endl;
    return 0;
}
```

B: Strong Palindrome

Let N be the length of the string S.
It is enough to check if S, the 1-st to the $\frac{N-1}{2}$-th letters of S and the $\frac{N+3}{2}$-th to the N-th letters are all palindromes, and output "Yes" if all of them are palindromes and "No" otherwise.
To check if S is a palindrome, for example the followings method is available.

1. For all i $(1 \leq i \leq N)$, check if the i-th letter of S and $(N-i-1)$-th letter of S are the same.
2. Check if S and the reversed string of S are the same.

Sample Code in C++ : https://atcoder.jp/contests/abc159/submissions/11091525

C: Maximum Volume

Let a, b, c be the depth, width and height respectively, then this problem asks to maximize abc subject to $a + b + c = L$.

By the inequality of arithmetic and geometric means, $(abc)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{a+b+c}{3}$, hence $abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$. The equality holds when $a = b = c$.

Therefore, the volume is maximum when $a = b = c = \frac{L}{3}$, in which case the volume is $\frac{L^3}{27}$.

Listing 2 Sample Code in C++

```
#include <stdio.h>
int main(){
        int L;
        scanf("%d",&L);
        printf("%.12f\n",(double)L*L*L/27);
}
```

D: Banned K

For $i = 1, 2, \ldots, N$, we define ....

Fix a $k (1 \leq k \leq N)$. Then, to find the answer of the problem for k, find the following two values:

- The number of ways to choose two distinct balls from the N balls so that the integers written on them are equal
- The number of ways to choose s ball from the $N - 1$ balls other than the k-th ball so that the integer written on it is same to that on the k-th ball

Then, subtract the latter from the former, which will be the answer.

The former is $\sum_{i=1}^{N} \binom{c_i}{2}$ and the latter is $c_{A_k} - 1$. Since the former is independent of k, it can be precalculated in an $O(N)$ time. The latter can be calculated in a $O(1)$ time each for each k.

Therefore, the problem could be solved in a total of $O(N)$ time.

E: Dividing Chocolate

If there is a constraints that "divisions can be done only vertically," then the problem can be solved by greedily taking from left to right. Therefore, it is enough to solve the "only-vertical" problem for all 2^{H-1} combinations of ways of dividing vertically. The time complexity is $O(2^H HW)$.

F: Knapsack for All Segments

The desired sum can be rephrased as:
the number of tuple $(L, x_1, x_2, \ldots, x_k, R)$ such that $a_{x_1} + a_{x_2} + \cdots + a_{x_k} = S$ and $L \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_k \leq R$.
This can be calculated with a dynamic programming with the following relational equations:

$dp[i][s][t] =$ The number of combinations chosen from the first i elements, such that the sum of elements is s and
L has not been added to the tuple yet (When $t = 0$)
L has been added but R has not been added yet(When $t = 1$)
both L and R has been added to the tuple(When $t = 2$)

which would be in a total of $O(NS)$ time and memory.
The desired sum is $dp[N][S][2]$.
For more details such as transitions, please refer to the following sample code.
https://atcoder.jp/contests/abc159/submissions/11096062