第12回Asprovaプログラミングコンテスト (AHC053)

元ネタ

最初こんな感じの問題を考えた

- 数量 A1, A2, …, AN の在庫が入った箱があります
- 数量 B1, B2, …, BM の注文が来ました
- なるべく注文数に一致するように箱を選んで発送して下さい
- 箱を開けて中身を別の箱に移すことはできません

A, B 両方入力だとあまり目新しさのない問題だが、A も出力にしてみたら意外に誤差が小さくできて面白そうだった

とりあえず思いつきそうなこと

- $2^{49}, 2^{48}, \ldots, 2^{41}$ を50個ずつ
  - 49,206,668,732 (840位相当)
- L, $2^{41}, 2^{40}, \ldots, 2^{33}$ を50個ずつ
  - 65,042,255,421 (650位)
- L を50個、$2^{41}, 2^{40}, \ldots, 2^{27}$ を30個ずつ
  - 78,254,620,806 (304位)
  - 実際は50個もいらないのでそこそこ大丈夫
  - 2^k が足りないときに 2^{k-1} を2個使うとかは必要
- [L, U] を等間隔に分けて一番近いもの1枚だけ使う
  - 67,188,870,954 (583位)

主な強い方針

1. L 以上のカード50枚と U - L 以下のカード 450枚に分ける
    - 450枚は指数的に減少させる
    - 配分は貪欲法で決める & 焼きなましなどで改善
    - writer解はこの方針
2. 定数Kを選び、どの山のカードもK枚に固定する
    - A の値は [L/K, U/K] を少し広げた範囲でランダムにする
    - 半分全列挙で組み合わせを探すなどしてカードの配分を最適化
        - A にランダム性があるのが大事そう
    - 本番の上位5名中4名がこの方針

小さい方の450個を調整してみる

100を30枚、50を30枚、25を30枚、……という構成を考える

75以上の値を作りたかったら 50 + 25 + … になる

B は乱数なので、たいてい75以上の値が必要になる
→50を30枚じゃなくて50と75を15枚ずつとかでいいのでは？

同じ値をたくさん用意するのではなく徐々に小さくする感じでよさそう

実際に等比数列にしてみると誤差が小さくなる

小さい方の450個を等比数列に

手で調整した A[50..] の値 (公比0.965)

```
3.86e12  3.72e12  3.59e12  3.47e12  3.35e12
3.23e12  3.12e12  3.01e12  2.90e12  2.80e12
...
6.01e05  5.80e05  5.59e05  5.40e05  5.21e05
5.03e05  4.85e05  4.68e05  4.52e05  4.36e05
```

- 配分方法はAの大きい順に「足しても目標値 B[j] を超えない山のうち、目標値との差が最小の山に追加」
- ときどき配分に失敗するけどある程度のケースでうまくいく
- 94,453,675,167 (99位相当)
    - 132 ケースで0.65G 以上、残り 18 ケースは 0.45G 以下

A[..50] に L より大きい値も使う

- 大きい方の50枚を L ちょうどにする必要はない
  - ランダムなので B=(L, L, L, …) とかは想定しなくてよい
  - もう少し大きい値にしたい
- ただし、A[i] <= B[j] を満たす i がないと困る
  - L=90, U=110, A=(110, 100, 90, 15, 10, 7, 4, 2, 1) のときに B=(90, 92, 95) みたいに小さい値がたくさん来ると困る
- (Aのk番目に大きい値) <= (Bのk番目に大きい値) となればよい
  - 十分高い確率で成り立てば OK

A[..50] の作り方

(Aのk番目に大きい値) <= (Bのk番目に大きい値) となればよい

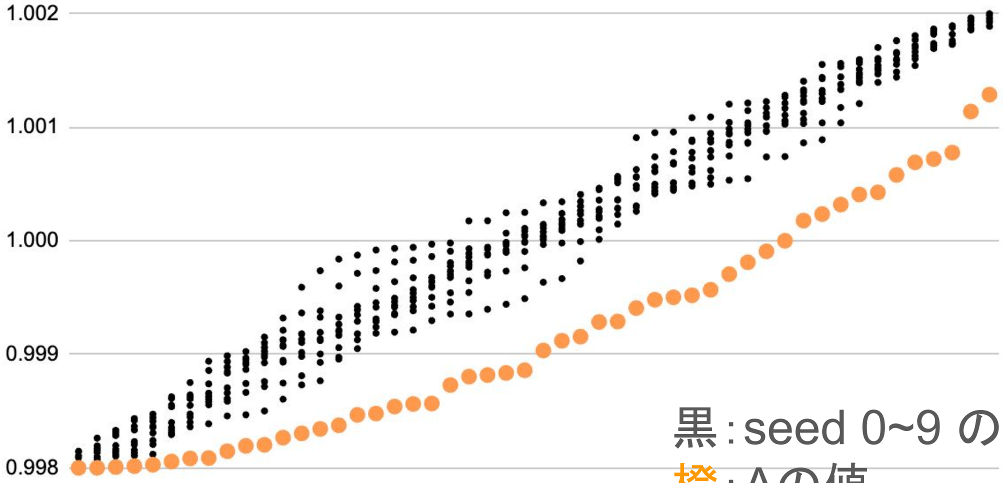
テストケースを手元でたくさん作って、すべてのケースの min をとる

（例）5 個のテストケースを作った場合

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	…
B (seed 1)	17	34	57	73	74	82	…
B (seed 2)	20	27	28	44	44	79	…
B (seed 3)	24	30	35	49	53	60	…
B (seed 4)	17	37	47	55	64	65	…
B (seed 5)	18	19	23	44	58	61	…
A	17	19	23	44	44	60	…

実際に作った A[..50]

- 15,000個サンプルを作って B[i] の最小値を A[i] とした
- 大きい方の50枚をこれに変えると 99,450,363,039 (60位相当)
    - 配分失敗がなくなり、全ケース 0.655G 以上



黒：seed 0~9 のBの値
橙：Aの値

残り450個を調整するための考察

小さい方の450個を再調整してみる。どこまで減らせるか？

- sum(A) >= sum(B) が成り立ってほしい
- A[50..] を 初項 c, 公比 r (0 < r < 1)の等比数列にすると
  sum(A) ≒ sum(A[..50]) + c / (1 - r)
- これが sum(B) を高確率で上回ればよい
- writer 解では sum(A) ≒ (sum(B) の期待値 + 2.5σ) となるようにした
  - σ ≒ sqrt(M / 12) (U - L)
- あとは c, r の一方を決めれば他方が決まるので適当に調整する

調整した結果

手で再調整した A[50..] の値 (公比0.95)

```
3.11e12  2.95e12  2.80e12  2.66e12  2.53e12
2.40e12  2.28e12  2.17e12  2.06e12  1.96e12
...
4.90e02  4.65e02  4.42e02  4.20e02  3.99e02
3.79e02  3.60e02  3.42e02  3.25e02  3.09e02
```

- 120,040,218,530 (9位相当)
- スコアが 0.8G を下回ったケースは 13/150
  - A を小さくしたことでまた配分に失敗するようになる

配分失敗するケースを減らす

- これまでは貪欲を1回やるだけで、運が悪いと失敗していた
- カードを見る順番を変えながら複数回試してみる
- 大きいカードだけswapする山登り(1000試行)で 124,429,653,201 (7位相当)
  - 全ケース 0.825G 以上になる
  - それ以外の順番を変えてもあまりスコアが上がらなかった

さらに450個を調整

配分の精度が上がったのでもっとギリギリを攻めてみる

手で再々調整した A[50..] の値 (公比0.941)

```
3.66e12  3.45e12  3.24e12  3.05e12  2.87e12
2.70e12  2.54e12  2.39e12  2.25e12  2.12e12
...
8.00e00  8.00e00  7.00e00  7.00e00  6.00e00
6.00e00  6.00e00  5.00e00  5.00e00  5.00e00
```

- さっきと同じ山登りを時間いっぱい(4万回ぐらい)回す
- さらに300回に1回キック（スコアにかかわらず遷移）
- 137,032,965,365 (1位相当)
- https://atcoder.jp/contests/ahc053/submissions/69373419

貪欲で作った解を改善する

時間の半分で貪欲、残りの時間で一番良かった解を改善

- カードの移動、交換、追加、削除で焼きなまし
- 山を2つ選んで作り直し
- 山を1つ選んで使ってないカードと合わせて再構築

137,552,833,585 になった

もっと大きい近傍を使うなどして改善できそう

K枚で固定する方針

ランダムな値を複数組み合わせたらいい感じに近似できるだろうという方針

A の値は [(L - (U - L) / 2) / K, (U + (U - L) / 2) / K) で一様ランダムにした
B[j] の値が (L + U) / 2 から遠い順に貪欲に決める

- K=2：81,471,223,442 (237位相当)
  - $O(N^2M)$ で全探索できる
- K=3：97,554,367,794 (71位相当)
  - $O(N^3M)$ だが全探索が間に合う
- K=4：111,896,846,216 (20位相当)
  - 2 枚組を全列挙すると $O(N^2(M+\log N))$ でできる

K枚で固定する方針

- K=6：131,188,845,118 (3位相当)
  - A[..250] からの3枚組と A[250..] からの3枚組を全列挙して組み合わせる
    - $O(N^3(M+\log N))$ だが間に合う
  - https://atcoder.jp/contests/ahc053/submissions/69374113
- K=8
  - K<=6 ほど簡単な方法はなさそう？
  - 上位2名はこの方針
  - A を半分に分けて K=4 を2回 + 探索を頑張ると延長戦1位（満点）
    - 1回目で誤差をある程度小さくする
    - 2回目で誤差を0にする