

AHC 062 - King's Tour 解説

Kiri8128

問題の概要

$N \times N$ グリッド上で $A = (A_{i,j})$ が与えられる。

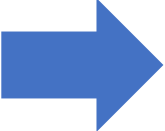
$$S = \sum_{k=0}^{N^2-1} k \times A_{i_k, j_k}$$

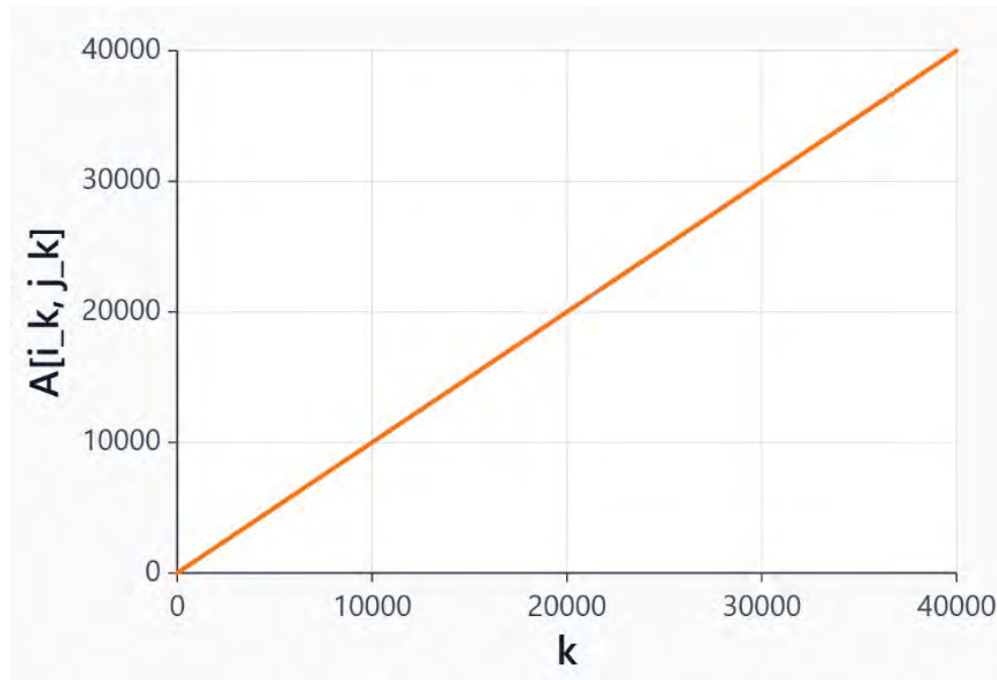
をなるべく大きくする King's Tour (※) を作ってほしい。
ただし、 k 番目に訪問するセルを (i_k, j_k) とする。

※ 縦・横・斜めへの移動を繰り返し、 $N \times N$ 盤面をちょうど一度ずつ通る Path

問題の概要 - やりたいこと

スコア S は (k, A_{i_k, j_k}) の相関係数の一次関数

相関を最大にしたい  小さいものを先に、大きいものを後に

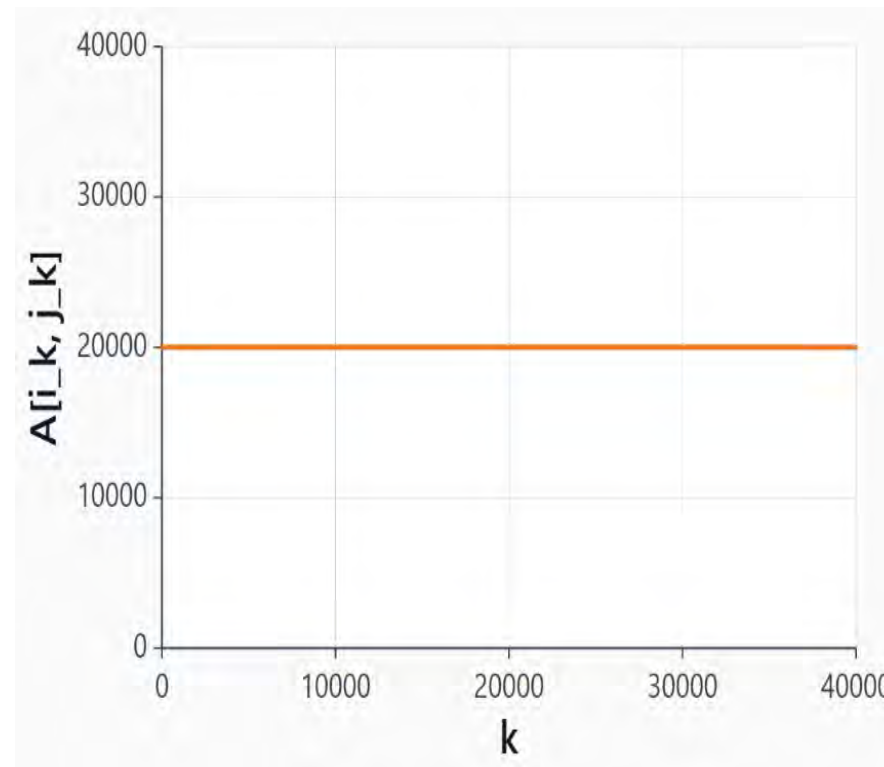
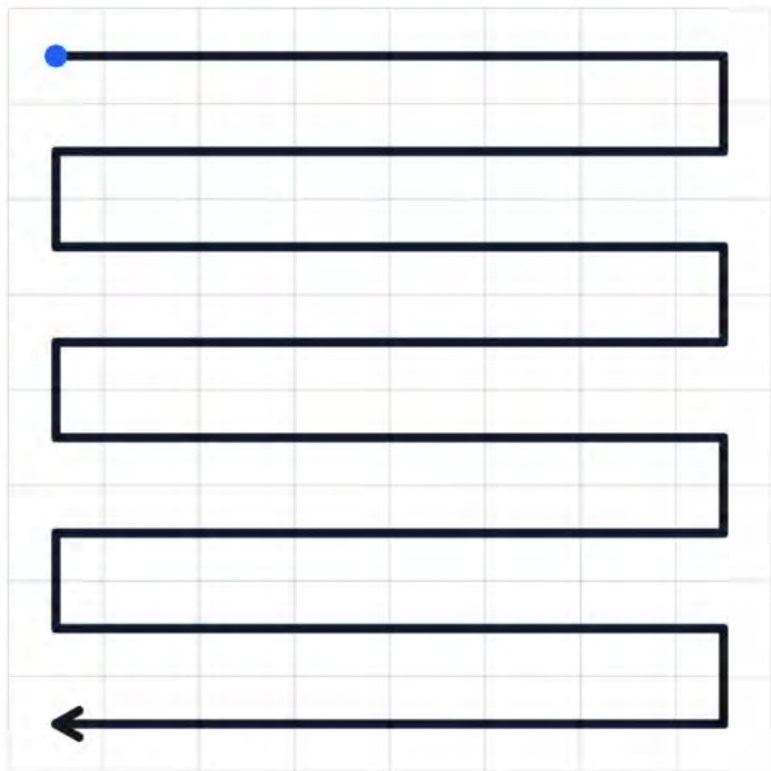


← こういうのがベスト

相関係数 100%
(533M相当)

蛇行解法

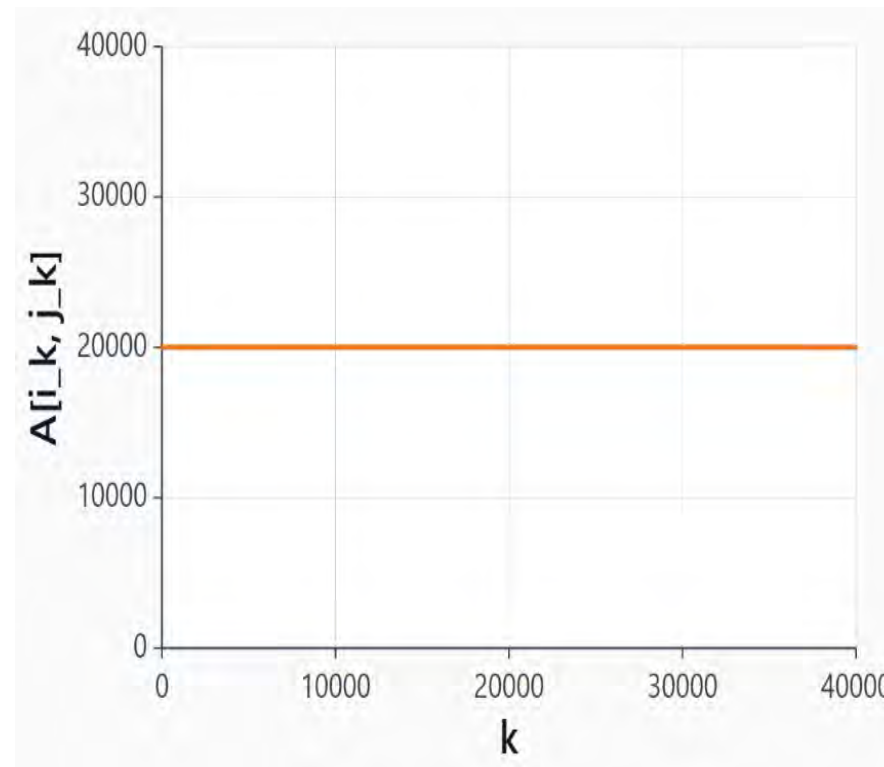
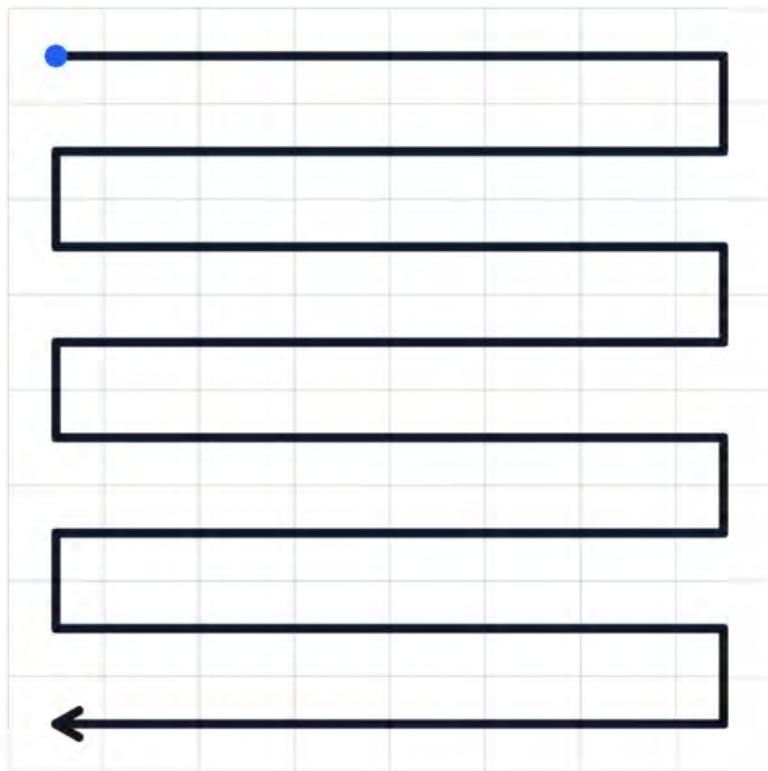
- Aを無視して全体を蛇行する



期待相関係数 0%
(400M相当)

蛇行解法

- Aを無視して全体を蛇行する



期待相関係数 0%
(400M相当)

39,994,356,724点
(本番618位相当)

[提出リンク](#)

アイデア

貪欲解法

- Aが最小のマスから始める
- 未訪問の隣接マスのうちAが最小のマスに移動する



- 残りのマス集合が一筆書き可能かどうかの判定は困難
- Validな解にするのが難しい

焼きなまし法

- Validなpathから始める
- 局所改善

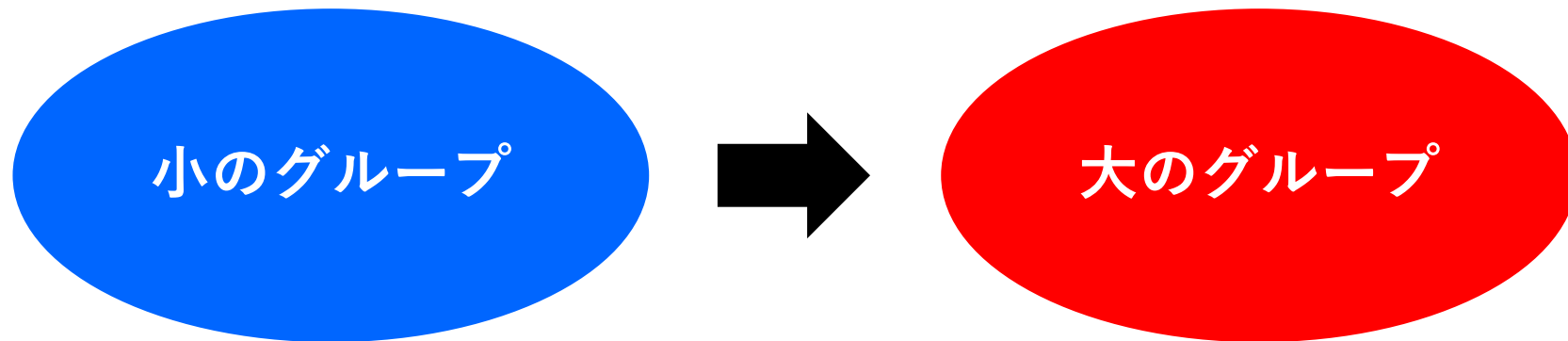


- 盤面が大きすぎて局所改善を繰り返しても良いスコアを取ることが難しい

盤面全体で効果がある強い方法はないか・・・？

グループ化

全体を小→大のいくつかのグループに分けて
順に繋げられれば・・・

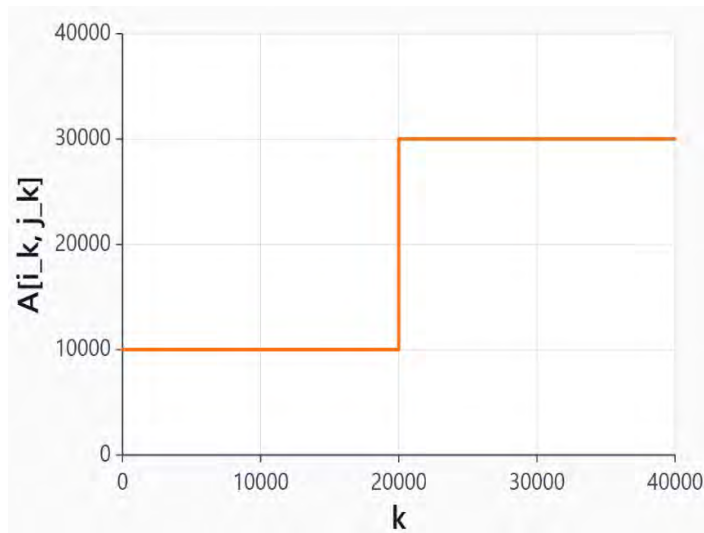


小を全部辿ってから、大を全部辿る

グループ化

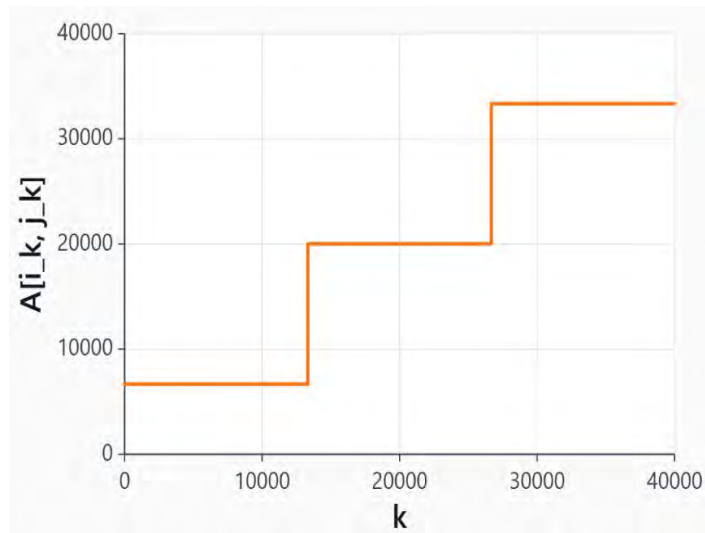
- Kグループに完全に分けた場合、相関係数の期待値は $1 - \frac{1}{K^2}$

2グループ



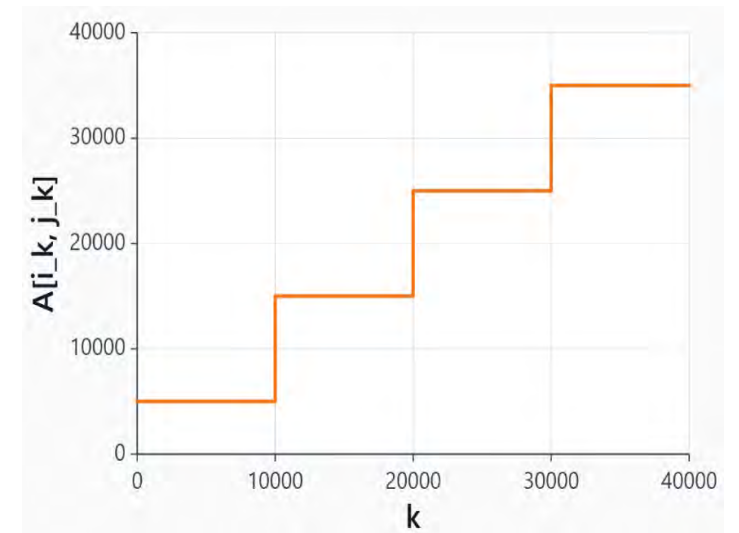
期待相関係数 75%
(500.0M相当)

3グループ



期待相関係数 88.89%
(518.5M相当)

4グループ



相関係数 93.75%
(525.0M相当)

ペア解法

- 盤面が $N \times N$ でなく $2 \times W$ だったら？

| | | | | | | | |
|----|----|----|---|---|----|---|----|
| 12 | 1 | 11 | 8 | 2 | 16 | 3 | 4 |
| 5 | 13 | 14 | 7 | 9 | 15 | 6 | 10 |

ペア解法

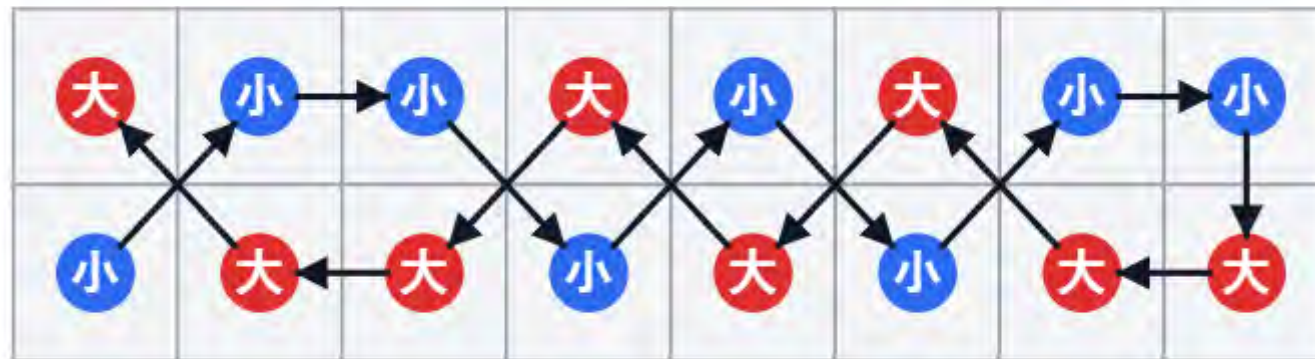
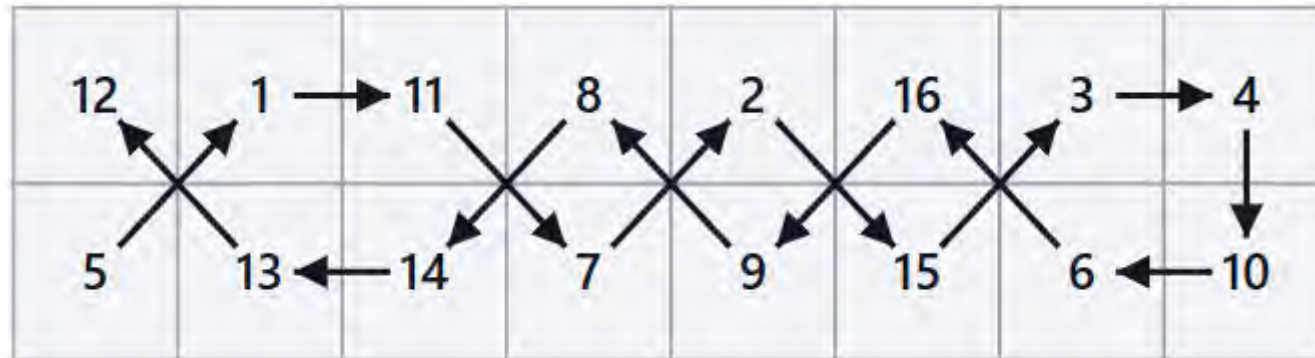
- ペアごとに小・大に分けて、

| | | | | | | | |
|----|----|----|---|---|----|---|----|
| 12 | 1 | 11 | 8 | 2 | 16 | 3 | 4 |
| 5 | 13 | 14 | 7 | 9 | 15 | 6 | 10 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 大 | 小 | 小 | 大 | 小 | 大 | 小 | 小 |
| 小 | 大 | 大 | 小 | 大 | 小 | 大 | 大 |

ペア解法

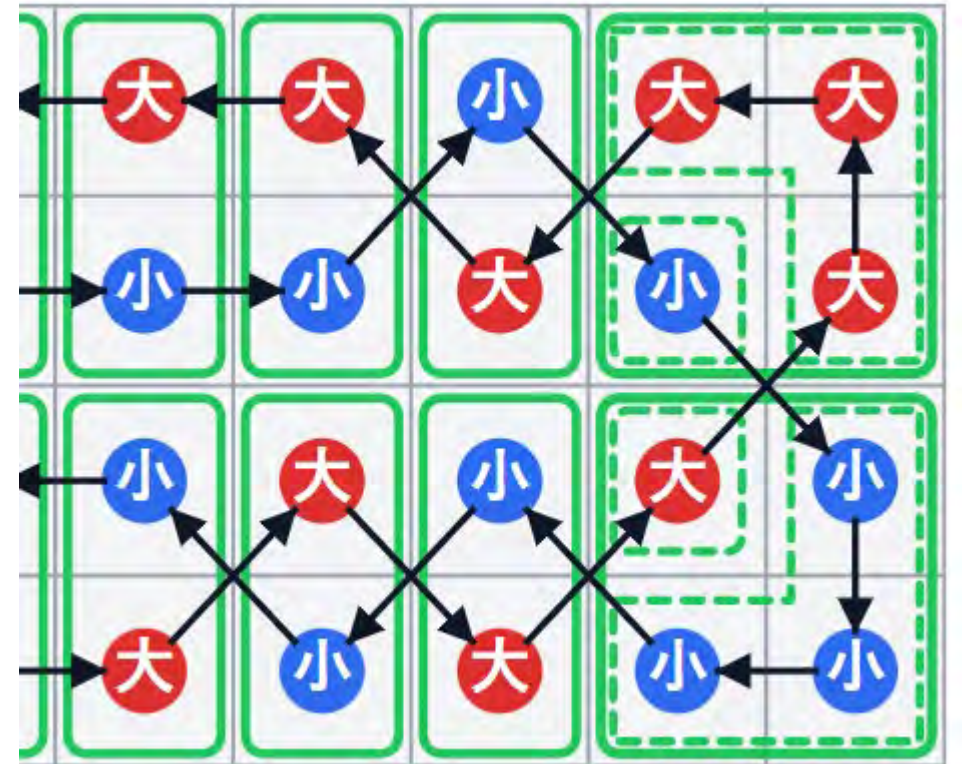
- ペアごとに小・大に分けて、小→大の順に結ぶ



ペア解法 - 折り返し

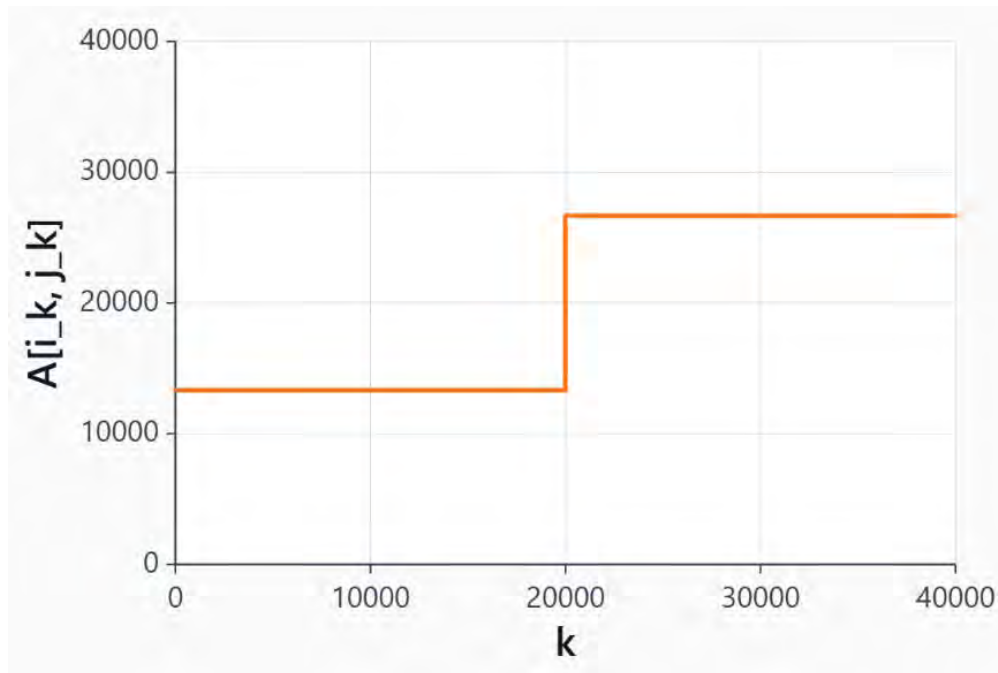
- 折り返し部分は、1対3の平均で小・大を決める

| | | | | |
|----|----|----|----|----|
| 26 | 30 | 3 | 17 | 9 |
| 1 | 11 | 13 | 5 | 23 |
| 4 | 14 | 7 | 28 | 24 |
| 6 | 10 | 32 | 18 | 31 |



ペア解法 - 性能分析

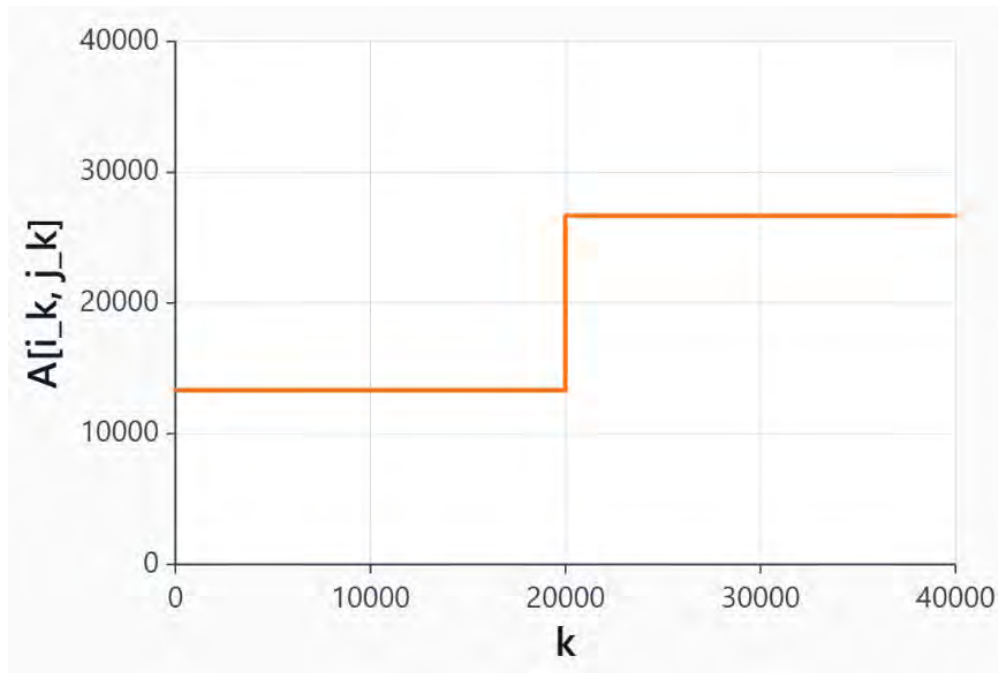
- 小の期待値は約 $\frac{N^2}{3}$ 、大の期待値は約 $\frac{2N^2}{3}$
- N が十分大きいとき、相関係数の期待値は 50%



期待相関係数 50%
(466.7M相当)

ペア解法 - 性能分析

- 小の期待値は約 $\frac{N^2}{3}$ 、大の期待値は約 $\frac{2N^2}{3}$
- N が十分大きいとき、相関係数の期待値は 50%



期待相関係数 50%
(466.7M相当)

46,604,389,808点
(本番102位相当)

[提出リンク](#)

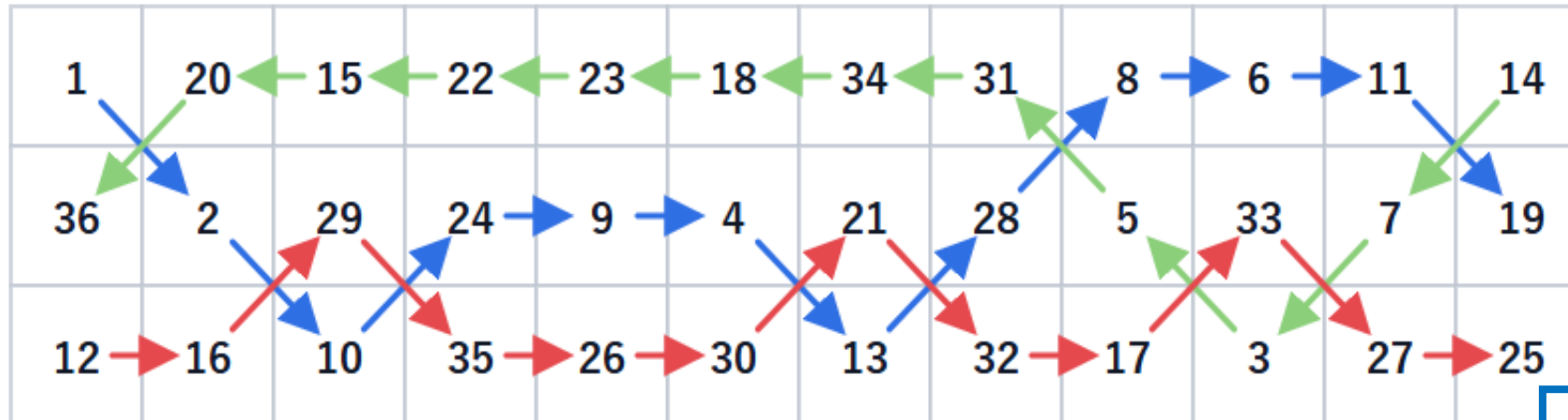
3重解法

- ペア解法では、全体を小と大に分けた
- 3行ごとに、全体を小・中・大に分けるとどうだろう？

| | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 20 | 15 | 22 | 23 | 18 | 34 | 31 | 8 | 6 | 11 | 14 |
| 36 | 2 | 29 | 24 | 9 | 4 | 21 | 28 | 5 | 33 | 7 | 19 |
| 12 | 16 | 10 | 35 | 26 | 30 | 13 | 32 | 17 | 3 | 27 | 25 |

3重解法

- 状態数は $3! = 6$ 通りと小さいので、DPで最適解が求まる
- 3つのうちの小・中・大を必ず小グループ、中グループ、大グループに属させられる訳ではない



47,319,949,422点
(本番31位相当)

※ ターン数も考慮すると少し良くなる

[提出リンク](#)

4×4ブロック解法

- 4×4では自由度が高い
- このサイズだと高速に最適解が求まる (bit DP)

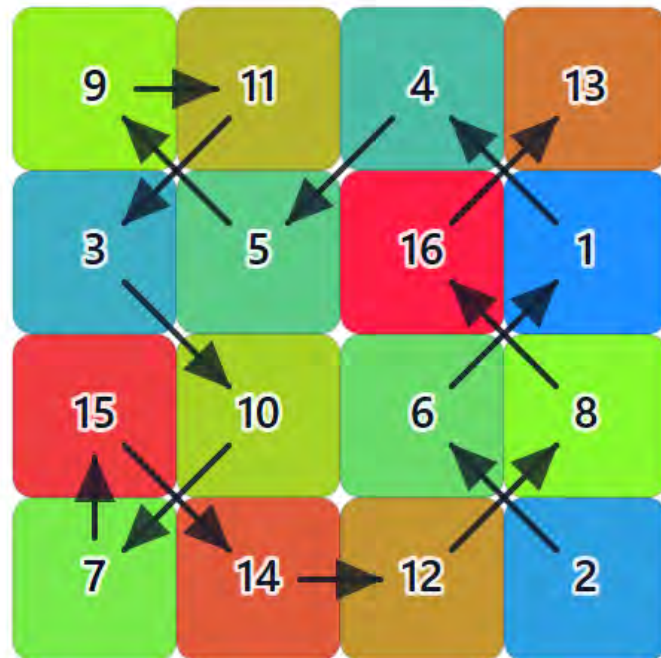
例)

| | | | |
|----|----|----|----|
| 9 | 11 | 4 | 13 |
| 3 | 5 | 16 | 1 |
| 15 | 10 | 6 | 8 |
| 7 | 14 | 12 | 2 |

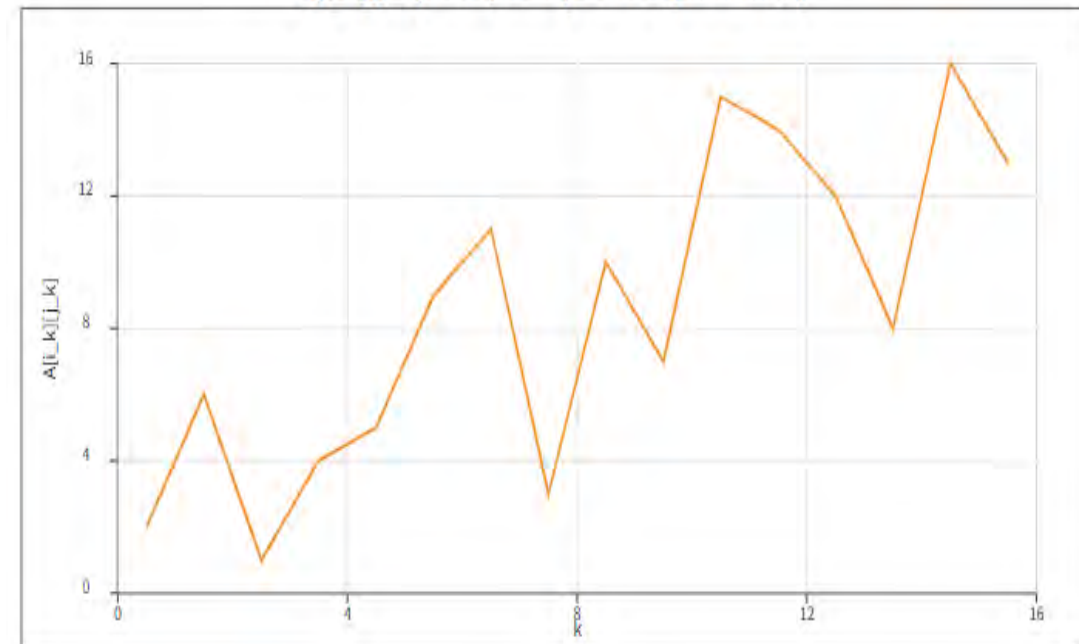
4×4ブロック解法

- 4×4では自由度が高い
- このサイズだと高速に最適解が求まる (bit DPなど)

例)

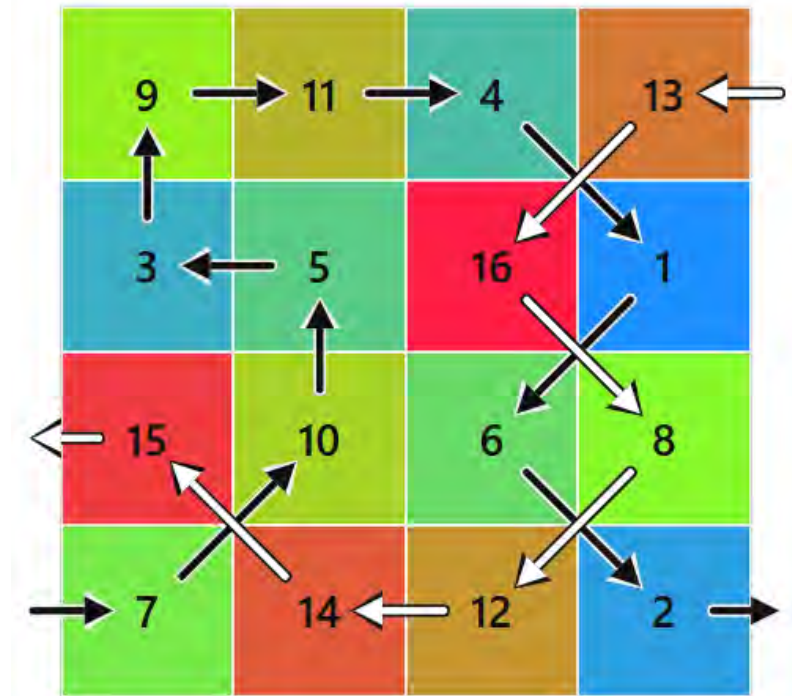


A[i_k][j_k] Plot (mean, 25-75%, min-max)



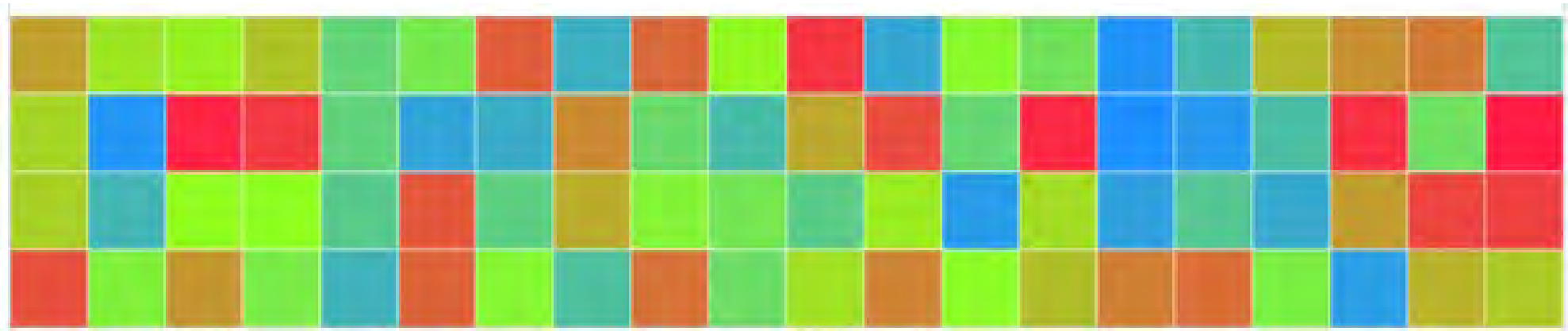
4×4ブロック解法

- 小・大に分けて繋げる
- ブロック内での始点・終点を決め
たときの最適経路／スコアを前計
算しておく
- DPや焼きなましで高速に処理で
きる



4行を最適分割

4×4が強いなら、4行まるごと最適化できたらもっと強い？



4行を最適分割 – フロンティアDP

4×4が強いなら、4行まるごと最適化できたらもっと強い？

➡ 連結状態を持つDP (※) で厳密解が求まる！

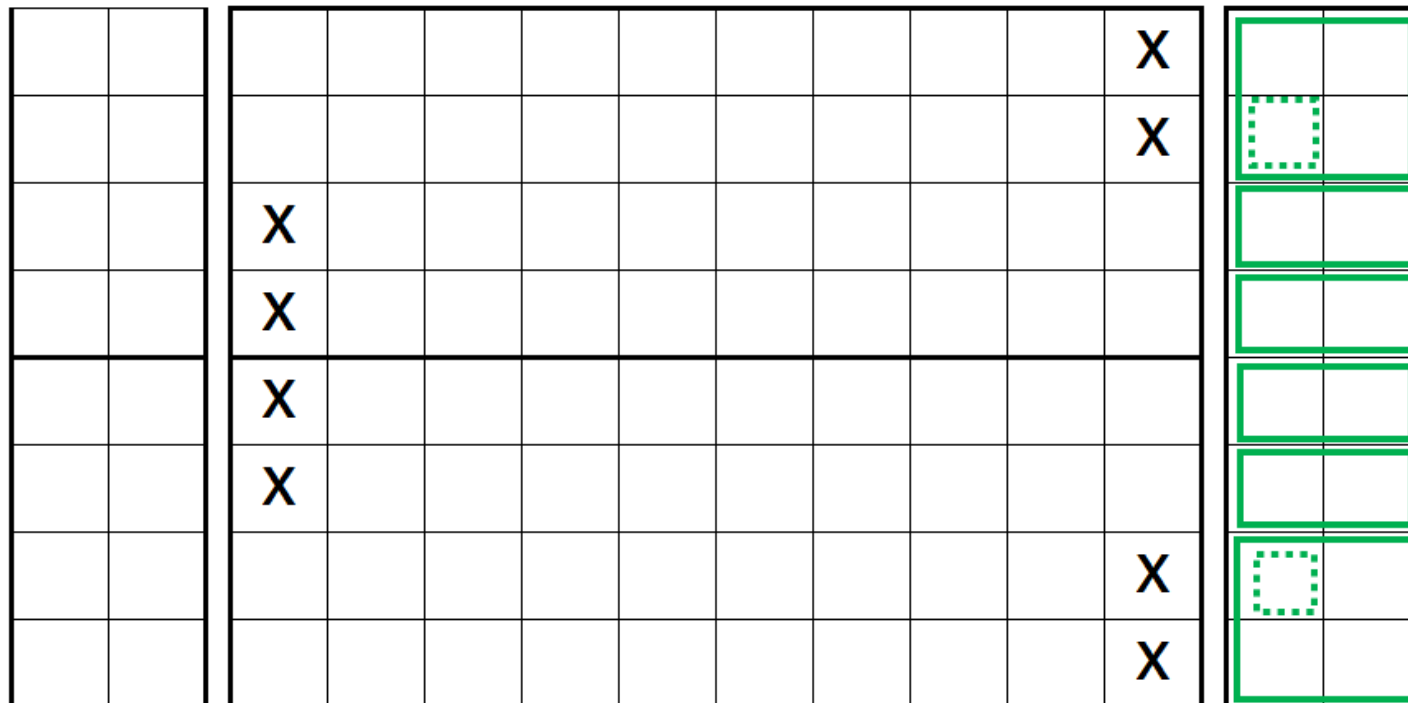


※ フロンティアDPとも呼ばれる

(参考) [TDPC-S](#)

4行を最適分割 - 折り返し

- 折り返しは、例えば「X」の位置を入口・出口として、端2列でペア解法のようにすれば良い



4行を最適分割 - スコア

フロンティアDP
簡易版 (Kiri)

フロンティアDP
(wataさん)

フロンティアDP
+ 焼きなまし

4行を最適分割 – スコア

フロンティアDP
簡易版 (Kiri)

フロンティアDP
(wataさん)

フロンティアDP
+ 焼きなまし

47,877,679,442点
(本番8位相当)

[提出リンク](#)

4行を最適分割 – スコア

フロンティアDP
簡易版 (Kiri)

47,877,679,442点
(本番8位相当)

[提出リンク](#)

フロンティアDP
(wataさん)

48,350,166,268点
(本番2位相当)

[提出リンク](#)

フロンティアDP
+ 焼きなまし

4行を最適分割 – スコア

フロンティアDP
簡易版 (Kiri)

47,877,679,442点
(本番8位相当)

[提出リンク](#)

フロンティアDP
(wataさん)

48,350,166,268点
(本番2位相当)

[提出リンク](#)

フロンティアDP
+ 焼きなまし

48,625,879,821点
(本番1位相当)

[提出リンク](#)

Thank you