ARC029 解説

解説スライド担当: 城下 慎也(@phidnight)

問題A – 高橋君とお肉

問題概要

- 2 つの肉焼き器を用いてお肉を焼く。
- N 個のお肉を肉焼き器を使って焼く。
- うまく割り当てて、すべてのお肉が焼けるまでの時間を最小化せよ。

- $1 \leqq N \leqq 4$

解法

- 全探索をすることで答えることができます。
- お肉をどちらの肉焼き器に割り当てるかという、全部で 2^N ある組み合わせを試します。
- 割り当てた後、それぞれの肉焼き器が肉を焼くのにかかる時間は、割り当てられた肉が要求する焼き時間の合計値と同じになります。
- 2 つある合計値のうち大きいほうがその割り当てにおける焼き時間となります。
- 計算量は O($N * 2^N$) となります。
- $N \leqq 4$ なので、満点をとることができます。

備考

- 指数全探索は競技プログラミングでは頻出です。
- 特に、部分点として出やすいので、ぜひとも習得してください！
- ちなみに、この問題は、すべてのお肉の焼き時間の合計値をMとおいたときに、$M/2$ 以上で最小の部分和を求める問題に帰着することができます。
- 上記の帰着により動的計画法で O(NM) で解くことができます。

問題B – 高橋君と禁断の書

問題概要

- ノートと箱 (ともに長方形で考える) が与えられる。
- それぞれの箱について、ノートが入るか否かを判定せよ。

- $1 \leqq N \leqq 5{,}000$
- $1 \leqq$ 辺の長さ $\leqq 100{,}000$

幾何の問題

- 幾何の問題は競技プログラミングで出てくることがあります。
- 実数計算とか特有の問題もあるので、慣れておくと良いと思います。

- 角度やベクトル計算 (外積、内積) などを知っておくと役立つことがあります。

実行できない解法

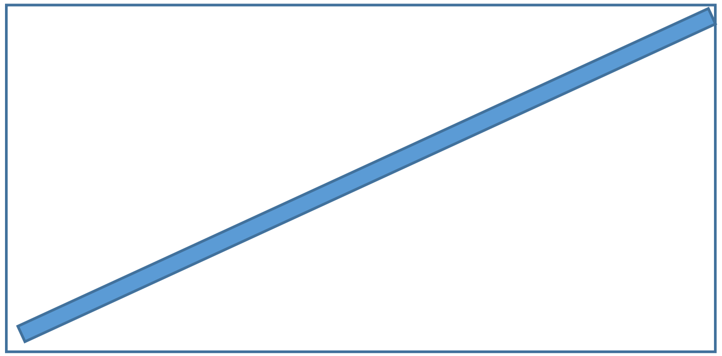
- すべての角度を試します。
- 「すべての角度」は、数え上げることができません。
- この方針だと、計算が終了しません。

実行できない解法

- すべての角度を試します。
- 「すべての角度」は、数え上げることができません。
- この方針だと、計算が終了しません。
- そのため、計算可能なように探索候補をしぼる必要があります。

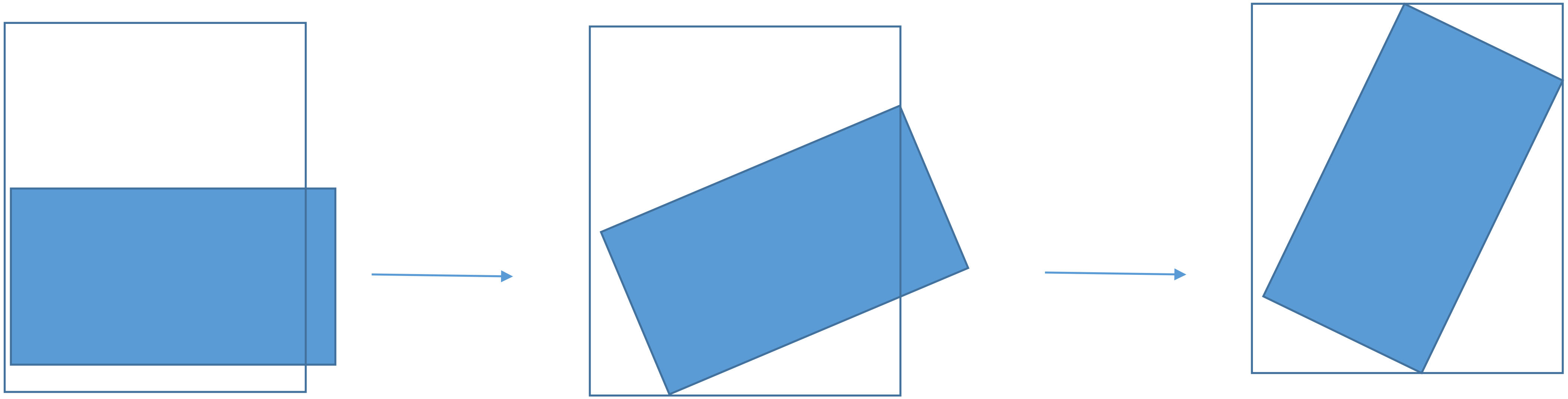
危険な解法

- ランダムに角度を決めて置く、という動作を一定回数繰り返し、何回やってもダメなら NO とし、うまく置けたら YES とします。
- 下図のような配置の場合、うまくいく確率がとても低く、NO と行ってしまう確率が高くなります。



考察

- 最初に、すべてを横向きに合わせます。
- 少しずつ回転させていくと、高さが増えていくので、高さが一致したときのみを試すと斜めのケースも対応できる。



解法

- 縦横に平行なケースを試し、斜めを、高さが一致した場合に限定することでそれぞれ O(1) で計算することができます。
- 高さが一致する瞬間は、最大値になる角度まで範囲で角度の二分探索で計算することができます。

問題C – 高橋君と国家

問題概要

- グラフが与えられます。
- 頂点に交易所、辺に舗装道を設置して、交易所へ舗装されていない道路を経由して移動できるようにします。
- 設置と舗装のコストが与えられるので、コストの合計を最小にしてください。

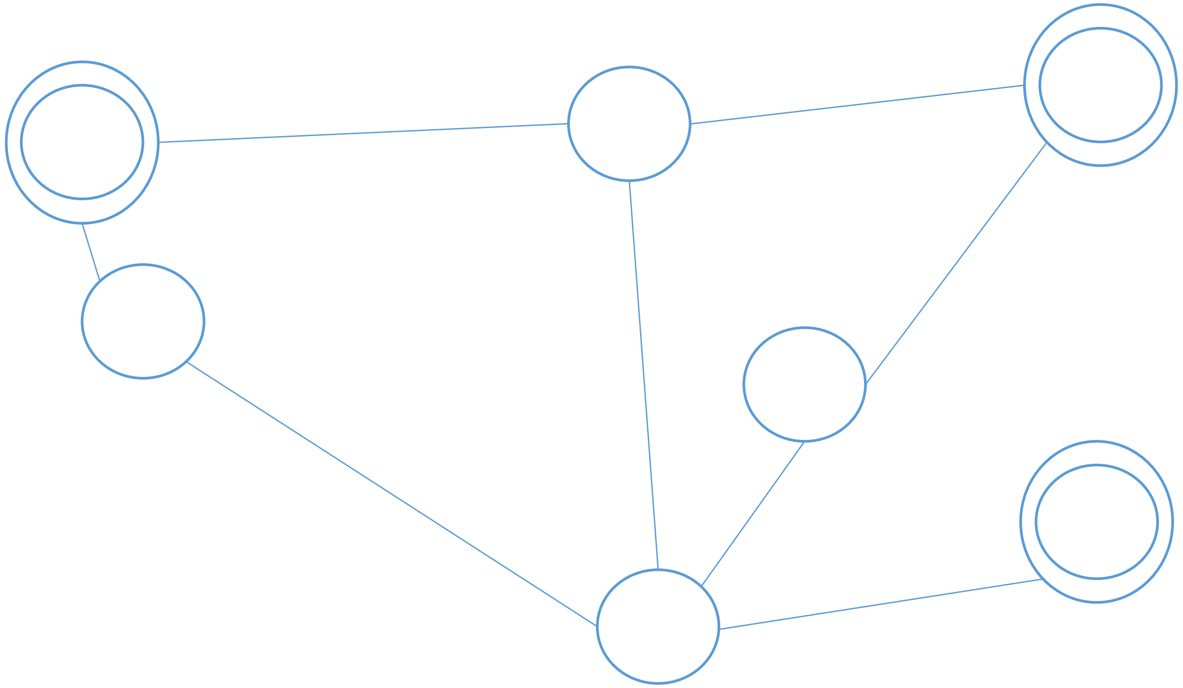
- $1 \leqq N$(頂点数) $\leqq 100{,}000$
- $1 \leqq M$(辺数) $\leqq 200{,}000$

部分点解法 1 (10点)

- すべての都市、道に対して、操作をするかしないかを決めて、その決め方でうまくいっているかを試します。
- うまく行っているかの判定は、各都市に対して、その都市の連結成分に交易所のある都市が入っているかを判定すれば良いです。
- 幅優先探索などを用います。
- 計算量はO($N * M * 2^{N+M}$) などになります。
- Union – find を用いると手早く連結判定はできます。

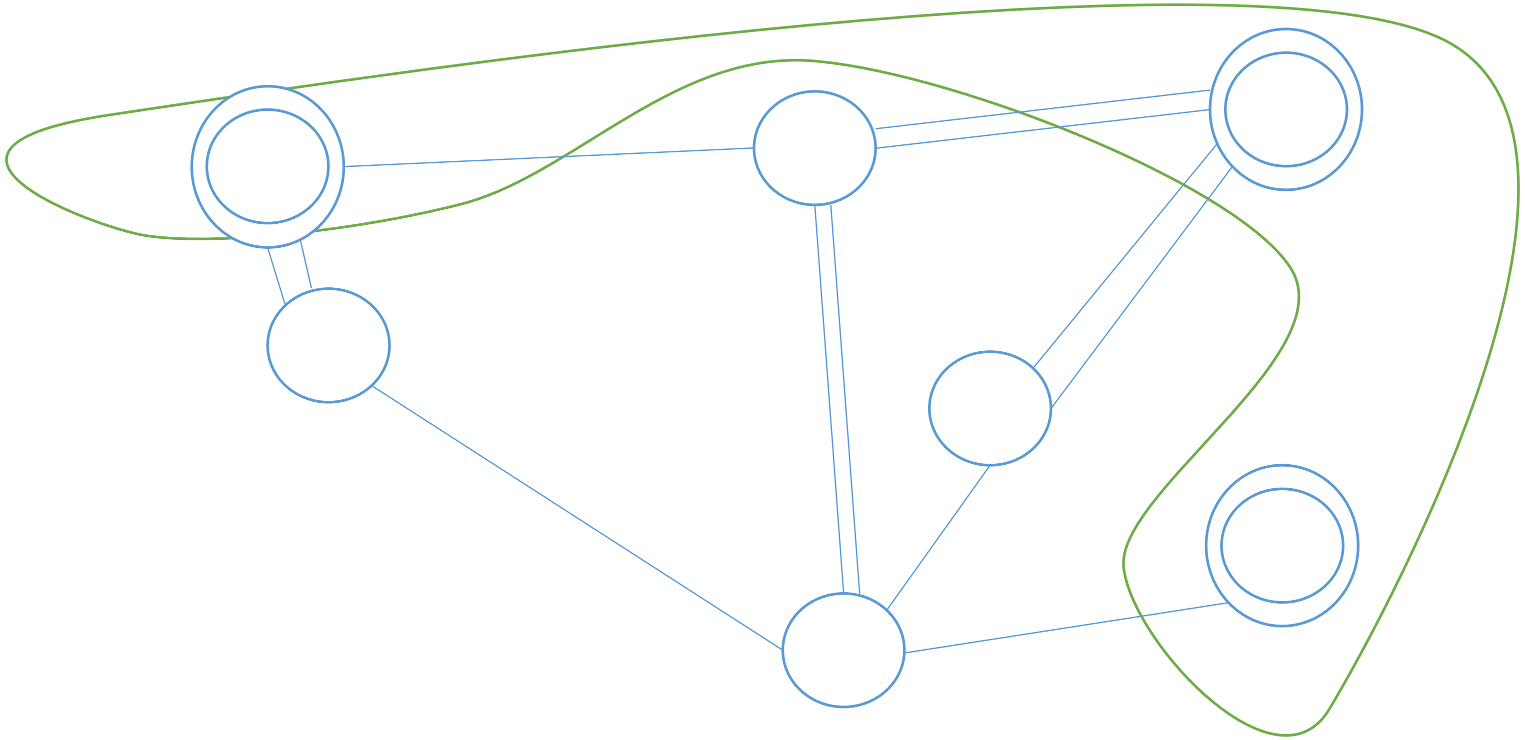
部分点解法 2 (10 + 20点)

- すべての都市に対して、操作をするかしないかを決めます。
- 辺を効率的に選択します。



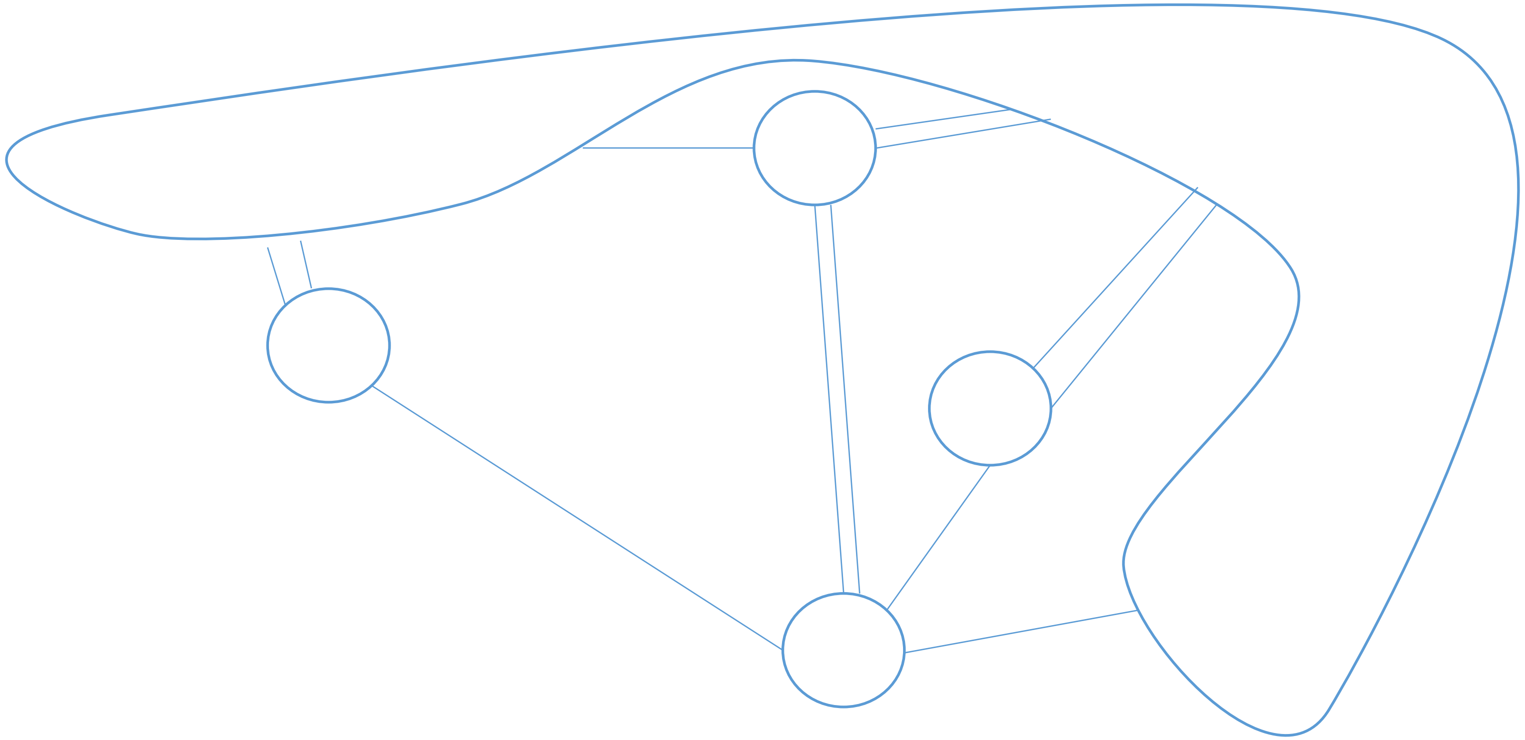
部分点解法 2 (10 + 20点)

- アイデアとして、交易所のある頂点を 1 つにまとめてみる。



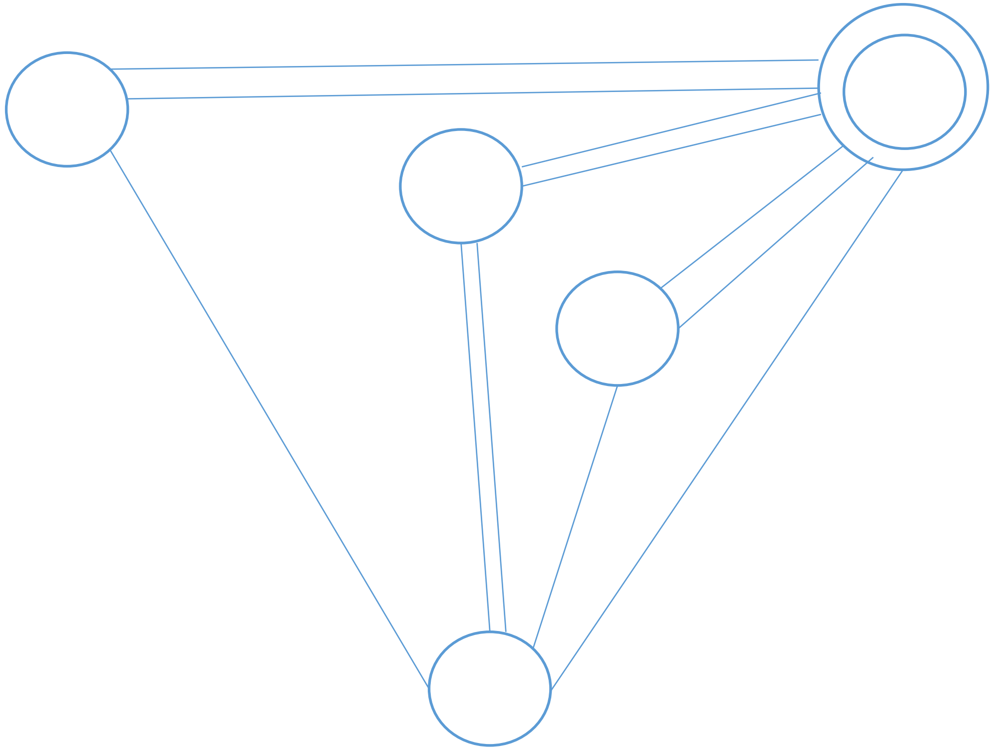
部分点解法 2 (10 + 20点)

- アイデアとして、交易所のある頂点を 1 つにまとめてみる。
- すると、全体が 1 つの連結成分になることがわかる。



部分点解法 2 (10 + 20点)

- アイデアとして、交易所のある頂点を 1 つにまとめてみる。
- すると、全体が 1 つの連結成分になることがわかる。

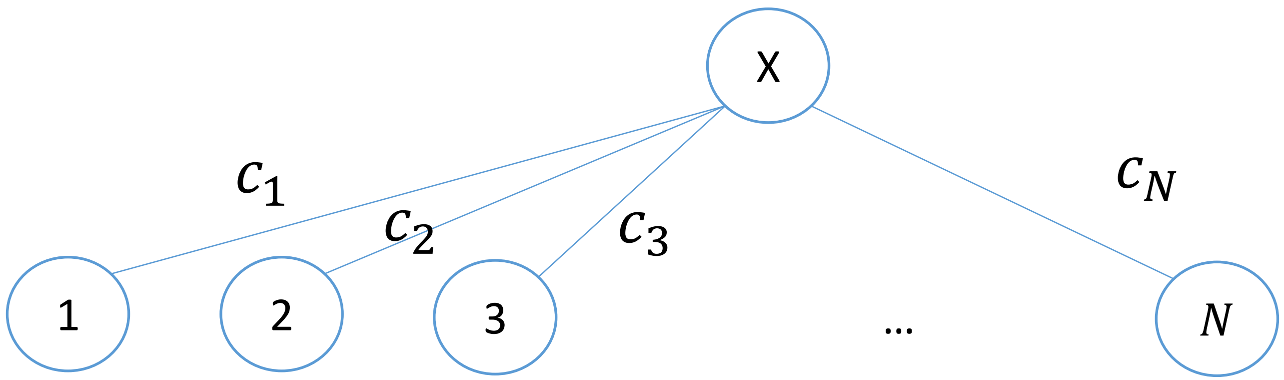


部分点解法 2 (10 + 20点)

- 「辺にコストがあって、辺の集合を選び全体を 1 つの連結成分にする選び方のうち、費用の合計値が最小となる選び方を求める問題」に帰着することができました。
- 上記の問題は、**「最小全域木問題」**として知られています。
- クラスカル法やプリム法で効率的に計算することができます。
- 交易所の設置方法は全部で 2^N 通りあり、すべてについて求めることで答えを求めることができます。
- 注意点として、交易所の設置方法によっては解が存在するとは限りません(元のグラフで、全体が連結でない場合など)。

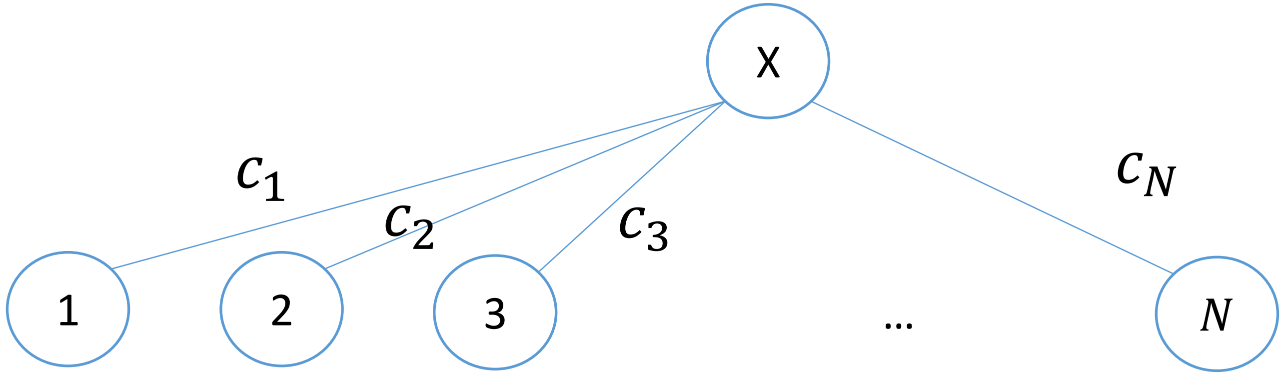
部分点解法 3 (10 + 20 + 30点)

- 最初に、交易所の頂点集合を選ぶ代わりに、仮想的な都市 X を用意します。
- 都市 X と都市 i $(1 \leqq i \leqq N)$ の間には、コストc_i(交易所の設置コストと一緒) の辺を張ります。
- 都市 1 から都市 N に関しては、交易所を置く代わりに、都市 X との辺を選ぶという操作だと考えます。



部分点解法 3 (10 + 20 + 30点)

- この処理をしたあと、良い状態であることと、都市 X を含めて全体で連結であることが同値となります。
- このグラフで最小全域木問題を解けば解が得られます。
- 有効な候補は毎回 O(N + M) 本で、最大 O(N) 回試すので、全体で O($N(N+M)$) となります。



満点解法

- 先ほどの部分点解法 3 で、プリム法やクラスカル法を用いて高速化すれば満点となります。

問題D – 高橋君と木のおもちゃ

問題概要

- 有向木(のおもちゃ)が与えられます。
- M個ある各整数を、置くか置かないかをします。
- 木の頂点に置いたら、頂点は親に古い数字を送ります。
- 最終的に残る整数の合計を最大化してください。

- $1 \leqq N$(頂点数) $\leqq 5{,}000$
- $1 \leqq M$(候補数) $\leqq 5{,}000$

部分点解法 1

- すべての置き方(置かないを含め)を試します。
- $(N+1)^M$ 通りを試すと答えが得られます。

考察

- 元からある数字について考えます。
- ある数字について、その数字が追い出されるなら、その数字を持っていた頂点の先祖となる頂点にあった数字もすべて追い出されています。
- すると、追い出される数字を持っていた頂点の集合は、頂点 1 を含む部分木となっているはずです。
- 逆に部分木(頂点数をXとする)が決まると、部分木の深いところから順に X 回おくだけで部分木のすべての整数を追い出すことができます。

考察

- この場合、残せる数字はX個だけです。
- 先ほどの方法だと、おいた数字すべてを残すことができるので、奥候補の数字から、大きいのをX個取り出せばよいです。
- すると、頂点 1 を根とする部分木の中で頂点数がXであるものを$0 \leqq X \leqq N$ ですべて求めることで計算できます。

考察+ 満点解法

- この計算は、各頂点 x に対して、その頂点 x を根する部分木で i 個選ぶ方法を dp[x][i] とする動的計画法で計算できます。
- この計算は各頂点に対して、子の頂点数が s1,s2,s3, … ,sk である場合に、O(s1s2 + (s1+s2)s3 + … + (s1+s2+…+s(k-1))sk)となります。
- これは一見 N の 2 乗に見えますが、(s1+s2+…+sk)^2 より小さいことがわかるので、頂点 1 で考えるとN の 2 乗で済みます。