

解答例

1

2025 より小さな正の奇数で、2025 より正の約数の個数が多いものは存在するか？

$2025 = 3^4 \times 5^2$ より約数の個数は $(4+1) \times (2+1) = 15$ 個である。たとえば、 $1575 = 3^2 \times 5^2 \times 7$ は約数の個数が $(2+1) \times (2+1) \times (1+1) = 18$ 個であるので、そのようなものは存在する。

※他にも 945, 1155, 1365, 1485, 1755, 1785, 1995 が条件を満たす。

2

赤玉 10 個、青玉 5 個、緑玉 5 個を同じ色の玉が隣り合わないようにな列に並べる方法は何通りあるか？ただし、左右を反転して一致するような並べ方は異なるものとして数える。

赤玉とそれ以外が交互に並ぶパターン

赤玉の位置の決め方が 2 通り、赤玉の位置の決定後青緑の決め方が $\binom{10}{5}$ 通りであるので、 $2 \cdot \binom{10}{5} = 504$ 通り。

交互ではないパターン

たとえば、
赤？赤？赤？赤？赤？赤？赤？赤？赤？
のように赤玉以外が連続する場所がちょうど一か所存在する。

- 赤玉の位置の決め方: 9 通り

- ?? 連続での場所での青緑の決め方: 2 通り
- 残りの場所への青緑の割り振り: $\binom{8}{4}$ 通り

より $9 \cdot 2 \cdot \binom{8}{4} = 1260$ 通り。

以上より答えは $504 + 1260 = 1764$ 通り。

3

あるアイスには、中に棒が入っている。棒には 10% の確率で当たりと書かれており、当たりと書かれた棒は新しい (中に棒の入った) アイスと交換してもらえる。高橋君は、交換してもらったアイスを含め 100 個以上のアイスを食べられるまでアイスを買った。高橋君が買ったアイスの個数の期待値を求めよ。ただし、それぞれの棒が当たりであるかどうかは独立であるものとする。また、交換してもらったアイスは買ったアイスの個数に含めないものとする。

高橋君が最初に買ったアイスを 1 番とし、それ以降、買ったアイスともらったアイスを合わせて獲得した順番に通し番号をつける。たとえば、 n 番のアイスの棒が当たりであったことによりもらったアイスは $n+1$ 番である。また、すでに m 本のアイスを食べ終え (かつ当たりの棒を持っていない状態で) 新しく買ったアイスは $m+1$ 番である。この問題は、100 番のアイスまでのうち買ったアイスの個数の期待値を求める問題である。

- 1 番のアイスは、必ず買ったアイスである。
- 2 番以降のアイスは、その直前のアイスの棒がはずれである場合に限り買ったアイスである。よって、買ったアイスである確率は 90% である。

以上より求める期待値は $1 + 99 \cdot \frac{9}{10} = \frac{901}{10}$ である。

※ k 本のアイスを食べるために買う必要のある個数の期待値を $f(k)$ と置き、漸化式を立て、等比級数の和などを用いて計算してもよいが、上の解答と比べるとやや複雑になる。

4

9×9 のマス目に区切られた盤面がある。この盤面に、17 個の 2×2 のピースを、以下の条件をすべて満たすように置くことはできないことを示せ。

- どのピースもマス目に沿って置かれている。
- どのピースも盤面の中に収まっている。
- 重なっている (共通部分の面積が正であるような) 2 つのピースは存在しない。

	@		@		@		@	
	@		@		@		@	
	@		@		@		@	
	@		@		@		@	

9×9 のマス目にどのように 2×2 のピースを置いても、上の表で @ の書かれたマス目を必ず含む。@ の書かれたマス目は 16 個であるので、17 個以上のピースを置くことはできない。

5

以下の条件をすべて満たす正整数が無数個存在することを示せ。

- 平方数である。
- 10 の倍数でない。
- 10 進法で表記したとき、各桁の数は 0, 2, 5 のいずれかである。

2 以上の任意の整数 k に対し、 $(5 \cdot 10^k + 5)^2 = 25 \cdot 10^{2k} + 50 \cdot 10^k + 25$ は条件を満たす。

6

ある学校には生徒が 100 人いる。また、部活がいくつかあり、どの部活にもちょうど 3 人の生徒が所属している。共通の部活が複数あるような 2 人の生徒は存在しない。このとき、所属する部活の個数が 48 個以下であるような生徒が存在することを示せ。

生徒 x が k 個の部活に所属しているとする。これらの部活を部活 $1, \dots, k$ とする。部活 i に所属している生徒 x 以外の二人の生徒を生徒 y_i, z_i とする。このとき、問題文の条件より、 $x, y_1, z_1, \dots, y_k, z_k$ の $2k + 1$ 人は異なる生徒である。 $2k + 1 \leq 100$ であるので、

$k \leq 49$ である。よって、どの生徒も所属する部活の個数は 49 個以下である。

どの生徒も、ちょうど 49 個の部活に所属していると仮定する。このとき、生徒 p と部活 c の組であって p が c に所属しているようなものの個数に注目すると

- p を固定したとき、 c の選び方が 49 通りであるので、そのような組の個数は 100×49 である。
- 一方、 c を固定したとき、 p の選び方が 3 通りであるので、そのような組の個数は 3 の倍数である。

100×49 は 3 の倍数でないので矛盾。以上より、所属する部活の個数が 48 個以下であるような生徒が存在する。

7

荷物がいくつかある。どの荷物も (正の重さを持ち) 重さが 1 kg 以下である。また、容量 1 kg のかばんがある。このかばんには、荷物の合計の重さが 1 kg 以下である限り何個でも荷物を詰めることができる。ただし、荷物を分割することはできない。次の条件を満たす実数 x の最大値を求めよ。

条件: すべての荷物の重さの合計が x kg 以下であれば、容量 1 kg のかばん 10 個にすべての荷物を必ず詰めることができる。

$x = \frac{11}{2}$ が条件を満たすこと

合計の重さが $\frac{11}{2}$ 以下であるような荷物の集合があり、必要なかばんの個数の最小値が $k (\geq 11)$ 個であるとする。このとき、すべての荷物を k 個のかばんに詰めるような方法の一つ取り、そのとき各かばんに入った荷物の重さの合計を $a_1, \dots, a_k$ ($a_1 \leq \dots \leq a_k$) とする。

$a_1 + a_2 \leq \frac{2}{k}(a_1 + \dots + a_k) \leq 1$ より、最初の 2 つかばんに入った荷物を 1 つかばんにまとめられることになり、 k の最小性に矛盾。よって、 $x = \frac{11}{2}$ のとき条件を満たす。

$x > \frac{11}{2}$ が条件を満たさないこと

このとき、 $11(\frac{1}{2} + \varepsilon) \leq x$ かつ $\frac{1}{2} + \varepsilon \leq 1$ をみたすような正の実数 ε が存在する。重さ $\frac{1}{2} + \varepsilon$ の荷物が 11 個ある場合、合計の重さは x 以下であるが 10 個のかばんにすべての荷物を詰めることはできない。よって、 $x > \frac{11}{2}$ のとき条件を満たさない。

以上より、条件を満たす x の最大値は $\frac{11}{2}$ である。

8

黒、赤、青、緑、黄の 5 色のペンが 2 本ずつある。また、黒、赤、青、緑、黄の 5 色のふたが 2 個ずつある。これらを組み合わせて、ふたの付いたペンを 10 本作る方法は何通りあるか？ただし、同じ色のペン同士、同じ色のふた同士は区別しないものとする。

n 色のペンが 2 本ずつ、 n 色のふたが 2 個ずつあるときに割り当てる方法を $f(n)$ 通りとする。また、 n 色のペンが 2 本ずつ、 $n-1$ 色のふたが 2 個ずつ、さらに別の 2 色のふたが 1 個ずつあるようなときに割り当てる方法を $g(n)$ 通りとする。(色の分布をペンとふたで逆にした状況でも割り当て方は $g(n)$ 通りとなる。)

$f(n)$ について

$f(1) = 1$ である。

$n > 1$ のとき、特定の色のペン 2 本に注目し、そのペンにどの色のふたをつけるかで場合分けする。

- 2 本のペンに同じ色のふたを割り当てるとき、そのふたの選び方が n 通り、残ったペンとふたの割り当て方が $f(n-1)$ 通りである。
- 2 本のペンに異なる色のふたを割り当てるとき、そのふたの選び方が $\frac{n(n-1)}{2}$ 通り、残ったペンとふたの割り当て方が $g(n-1)$ 通りである。

よって、 $f(n) = nf(n-1) + \frac{n(n-1)}{2}g(n-1)$ である。

$g(n)$ について

$g(1) = 1$ である。

$n > 1$ のとき、その色のふたが 1 個だけであるような 2 個のふたに注目し、それらにどの色のペンをつけるかで場合分けする。

- 2 個のふたに同じ色のペンを割り当てるとき、そのペンの選び方が n 通り、残ったペンとふたの割り当て方が $f(n-1)$ 通りである。
- 2 個のふたに異なる色のペンを割り当てるとき、そのペンの選び方が $n(n-1)$ 通り、残ったペンとふたの割り当て方が $g(n-1)$ 通りである。

よって、 $g(n) = nf(n-1) + n(n-1)g(n-1)$ である。

以上を用いて計算すると以下の表ようになる。

n	1	2	3	4	5
f(n)	1	3	21	282	6210
g(n)	1	4	33	480	11010

よって、答えは $f(5) = 6210$ である。

9

300 個の白マスが横一列に並んでいる。高橋君と青木君は、高橋君からはじめて、交互に白マスを 1 個選び赤く塗るという操作を繰り返す。(どちらも赤く塗ることに注意せよ。) それぞれが 100 回ずつ操作を行い、合計 200 個のマスが赤く塗られたら操作を終える。次の条件を満たす整数 k の最小値を求めよ。

条件: 高橋君の操作の仕方にかかわらず、青木君がうまく操作をすることで、 k 個以上の連続した赤マスが存在しないようにできる。

$k = 101$ が条件を満たすこと

マスに左から $1, \dots, 300$ と番号がついているとする。青木君は、次のような戦略をとることで操作終了後に 101 個以上の連続した赤マスが存在しないようにできる。

- 高橋君が直前で操作したマスと 150 で割った余りが等しいマスに対して操作を行う。

このとき、操作終了後の 200 個の赤マスの番号を 150 で割った余りを考えると、100 種類しか登場しないので、101 個以上の連続した赤マスは存在しない。

$k < 101$ が条件を満たさないこと

高橋君が、常に最も左の白マスに対して操作をする場合を考える。このとき、左から 100 個のマスは必ず赤マスとなるので、100 個以上の連続した赤マスが存在する。よって、 $k < 101$ は条件を満たさない。

以上より、条件を満たす k の最小値は 101 である。

10

1g , 2g , 4g , ..., 2^{100}g のおもりが 1 個ずつある。また、左右の皿におもりを乗せられるてんびんがある。左右の皿に何個か (0 個でもよい) のおもりを乗せることで、(左の皿に乗ったおもりの重さの合計) と (右の皿に乗ったおもりの重さの合計) の差の絶対値の重さをはかることができる。次の条件を満たす正整数 n の最小値を求めよ。

条件: 左右の皿に合計 5 個以下のおもりを乗せることで、 ng (エヌグラム) をはかることはできない。

2 進法表記の数を右下に 2 を付けて表す。

1010101010₂ 以下が 5 個以下のおもりではかれること

一般に、任意の (50 以下の) 正整数 n に対し、 $10 \dots 10_2$ (10 が n 回繰り返される) 以下の数は n 個以下のおもりではかれることを帰納法で示す。

$n = 1$ のときは明らか。

$n = k - 1 (k \geq 2)$ のとき成り立つとして $n = k$ のとき示す。 $x \leq 10 \dots 10_2$ (10 が k 回繰り返される) として x が k 個以下のおもりではかれることを示す。

- x の 2 進表記が $2k - 1$ 桁以下である場合
このとき、 x の 2 進表記に現れる 1 の個数が k 個以下であるか、0 の個数が $k - 2$ 個以下であるかの少なくともいずれかが成り立つ。
 - 1 の個数が k 個以下である場合、 k 個以下のおもりではかれることは明らか。
 - 0 の個数が $k - 2$ 個以下である場合、 x の桁数を t として、 $2^t - 1 - x$ が x の 0, 1 を反転した数であることに注目すると、 $2^t - 1 - x$ は $k - 2$ 個以下のおもりではかれる。よって、 x は k 個以下のおもりではかれる。
- x の 2 進表記が $2k$ 桁である場合、 $x - 2^{2k-1}$ は $10 \dots 10_2$ (10 が $k - 1$ 回繰り返される) 以下であるので、帰納法の仮定より $x - 2^{2k-1}$ は $k - 1$ 個以下のおもりではかれる。よって、 x は k 個以下のおもりではかれる。

1010101011₂ をはかるのに必要なおもりの最小値が 6 個以上であること

すべての 2 べきに対応したおもりがあるとして、1010101011₂ をはかるのに必要なおもりの最小値が 6 個であることを示せばよい。

x をはかるのに必要なおもりの個数の最小値を $f(x)$ とする。このとき、 x が偶数であれば、重さ偶数のみのおもりを使うことになるので、 $f(x) = f(x/2)$ となる。 x が奇数であれば、1 のおもりを使うことになり、1 のおもりを除いたときの重さの差が $x - 1$ または $x + 1$ となるようにすればよい。よって、 $f(x) = \min\{f((x+1)/2), f((x-1)/2)\}$ である。このことを用いて再帰的に計算すると

- $f(1_2) = 1$
- $f(11_2) = 2$
- $f(101_2) = 2$
- $f(1011_2) = 3$
- $f(10101_2) = 3$
- $f(101011_2) = 4$
- $f(1010101_2) = 4$

- $f(10101011_2) = 5$
- $f(101010101_2) = 5$
- $f(1010101011_2) = 6$

が確認できる。

以上より、条件を満たす n の最小値は $1010101011_2 = 683$ である。