codeFlyer 本選 解説

A: 値札

A – 値札

- 正整数が N 個与えられる
- どの整数にも末尾に 0 が K 個ついている最大の K は？

- それぞれの整数を、10で割り切れる限り割り続け、回数をカウントしましょう
  - 3200なら、3200 -> 320 -> 32 で2回割れる
- N個の整数について回数をカウントし、最小値が答え

B: 交通費

問題概要

- コンテストに N 人の参加者がいる
- c, d を決めたとき、参加者 i に支給する交通費は
  - $|X_i - c| \leq d$ なら $|X_i - c|$ 円
  - そうでないなら d 円
- 「$c = C_i, d = D_i$ のときの交通費の支給額の合計は？」というクエリをたくさん処理せよ

解法

- 人を 4 種類に分けて処理する
  - $X_1, \ldots, X_i < c\ - d$: 金額は di
  - $X_{i+1}, \ldots, X_j \leq c$: 金額は
    $$c(j\ - i) - \left(X_{i+1} + \cdots + X_j\right)$$
  - $X_{j+1}, \ldots, X_k \leq c + d$: 金額は
    $$\left(X_{j+1} +\ \ldots + X_k\right) - c(k\ - j)$$
  - $X_{k+1}, \ldots, X_N$: 金額は $d(N\ - k)$
- i, j, k の値はクエリごとに二分探索
- X の和は各 i について $X_1 + X_2 +\ \ldots + X_i$ を前計算しておくことでクエリごとに定数時間

C: 部分文字列と括弧

C – 部分文字列と括弧

- 括弧列が与えられる
- 連続する部分文字列のうち、括弧の対応が取れているものは何個あるか？

- $|S| \leq 10^5$

C – 部分文字列と括弧

- 括弧列の対応が取れている文字列とは、どういうものか？
  - ‘(‘と’)’が同じ回数登場する。 ()())みたいに回数が違うと、絶対に括弧の対応が取れない
  - 文字列の途中までを見たときに、‘(‘の登場する回数は’)’の登場する回数以上である。 ())(()みたいに最初の3文字が ()) で) の方が多いときとかは、括弧の対応が取れない
  - 上の二つの条件を満たしていれば、括弧の対応が取れている
- これは頻出なので覚えてほしいナァ…

C – 部分文字列と括弧

- 前ページの条件を踏まえると、
  p[0] = 0
  p[i+1] = p[i] + 1 (Sのi番目の文字が '(' のとき)
  p[i+1] = p[i] – 1 (Sのi番目の文字が ')' のとき)
- という配列を用意すれば、(i, j)が欲しい条件は、
  $p[i] = p[j+1]$ かつ $p[k] \geq p[i]$ $(i < k \leq j)$
- $p[i]$ $(0 \leq i \leq |S|)$ を事前に求めておくことはできる

C – 部分文字列と括弧

- p[i]が低い順に、(i,j)をさがしていく

- 同じp[i]を持つiを昇順に列挙しておく
- i_1 (間1) i_2 (間2) i_3 (間3) i_4 (間4) i_5
- それぞれの間にあるpの値でp[i]より低いものがあるときは、そこをまたぐことができない
- そうでない範囲で、i を2つ選んでくればよい
- 右端をループで回し、何個(k個とする)左のiからなら来れるかを順次計算して、k(k+1)/2を足していく
- p[i]より低いものがあるかどうかは、BITかsetで管理できる

D: 数列 XOR

D – 数列 XOR

- N 要素の整数列が 2 個与えられる
- 片方に対しては「ある要素を隣の要素に XOR する」が何度でもできる
- 2 つの整数列を一致させられるか？

例

- (4, 7, 1, 2) -> (4, 7 xor 4, 1, 2) = (4, 3, 1, 2)

D – 数列 XOR

- 隣り合う要素の入れ替えができる
  - $A_i \leftarrow A_i\ xor\ A_{i+1}$
  - $A_{i+1} \leftarrow A_i\ xor\ A_{i+1}$
  - $A_i \leftarrow A_i\ xor\ A_{i+1}$

- なので，任意の **2** つの要素の入れ替えができる

D – 数列 XOR

- さらに，隣り合う要素でなくても XOR ができる ($A_i \leftarrow A_i\ xor\ A_j$ for any $i \neq j$)
  - $A_{i+1} \leftrightarrow A_j$ ($i = n$ の場合は $A_{i-1} \leftrightarrow A_j$, 以下同様)
  - $A_i \leftarrow A_i\ xor\ A_{i+1}$
  - $A_{i+1} \leftrightarrow A_j$

D – 数列 XOR

- なので，数列を，ビット横ベクトルを n 個並べた行列 $\mathbb{F}_2{}^{n\times 60}$ と思うと，行基本変形ができる
  - 行交換 -> OK
  - ある行に他の行のスカラー倍を足し込む -> OK
  - 行を非零な定数倍する -> 考えなくてよい

- 2 つのビット行列が，行基本変形だけで移りあうか？を判定すればよい
  - 両方に適当な行基本変形を施して，一致させられるか？でも OK（行基本変形は可逆なので）

D – 数列 XOR

- 両方の行列を行標準形に変形し，一致するかどうか判定すれば OK
  - 階段行列
    - 非零な行は全部 0 な行より上にある
    - 非零な行の最左の非零成分の位置は，上の行より真に右にある
  - 非零な行の最も左にある非零成分は，他の行では 0
  - 詳しくは Wikipedia などをみてください
- Gauss の消去法などで求められる
- $O(NB^2)$ (B: 各要素のビット数)

E: 数式とクエリ

E – 数式とクエリ

- 数式が与えられる(加減乗、括弧、変数aからなる)
- デフォルトでそれぞれの変数aには値が定まっている
- クエリ: 一つの変数の値をxにしたときに、数式の値は何になるか求めよ
- 式の長さ ≤ 200,000
- 変数の数 ≤ 100,000
- Q ≤ 100,000

E – 数式とクエリ

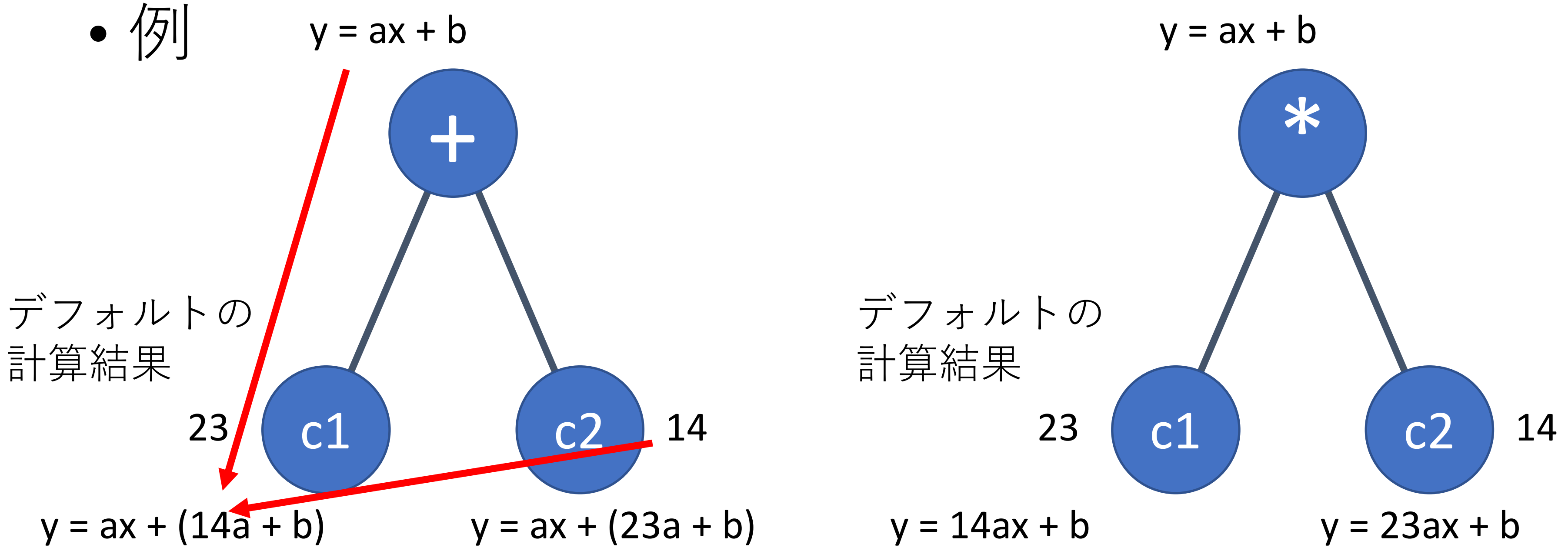
- それぞれの変数が1増加したときに数式の値がいくつ増加するかを求められれば、簡単にクエリに答えられる
- まずは普通に構文解析をし(2分木となる構文解析木を作るとこの後がやりやすい)、構文解析木の各頂点以下の(デフォルトの変数の値を使った場合の)計算結果を求めておく

E – 数式とクエリ

- さらにもう一度構文解析木をDFSする
- それぞれの頂点について、その頂点をxに書き換えたときの答えが ax+b になるような a,b をDFSすることで求められれば良い (根から計算していく)

E – 数式とクエリ

- 例



y = ax + b
+
デフォルトの
計算結果
23
c1
c2
14
y = ax + (14a + b)
y = ax + (23a + b)
y = ax + b
*
デフォルトの
計算結果
23
c1
c2
14
y = 14ax + b
y = 23ax + b

F: 配信パズル

F – 配信パズル

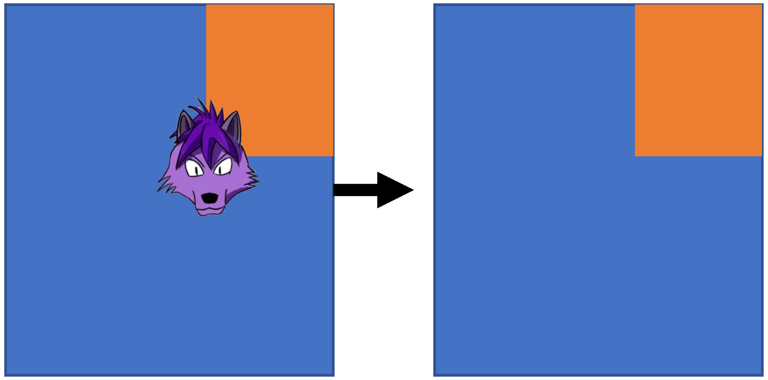
- H*Wの盤面のマスがそれぞれ白か黒に塗られている
- 操作A: 盤面の長方形領域を選んで全ての色を反転させる
- 操作B: 1行/1列を選んでその行/列の全ての色を反転させる
- 操作Aが最大1回、操作Bは何回でもできる。全部の色を同じにできるか？
- ただし、この質問はQ回繰り返される。質問のたびに1マスの白黒が反転する
- H, W≤ 2,000 Q ≤ 300,000

F – 配信パズル

- 操作Bは比較的知られた操作
- 問題例: 「ある盤面が操作Bだけで全部白にできますか？」
  - 解法例:
  - 行と列を頂点にし、ある行とある列が同じグループに属するか違うグループに属するかのUnion-Findをする
  - 全てのマスについて c[0][0] xor c[0][j] xor c[i][0] xor c[i][j] が 0 になるか(c[i][j]はマスが白のとき0、黒のとき1) を判定する
  - 全ての 2x2 の subrectangle について、黒マスの個数が偶数か判定する
- この問題がこれらの方法で解けることだけでなく、解法例たちが同値なことも覚えて欲しいナァ…

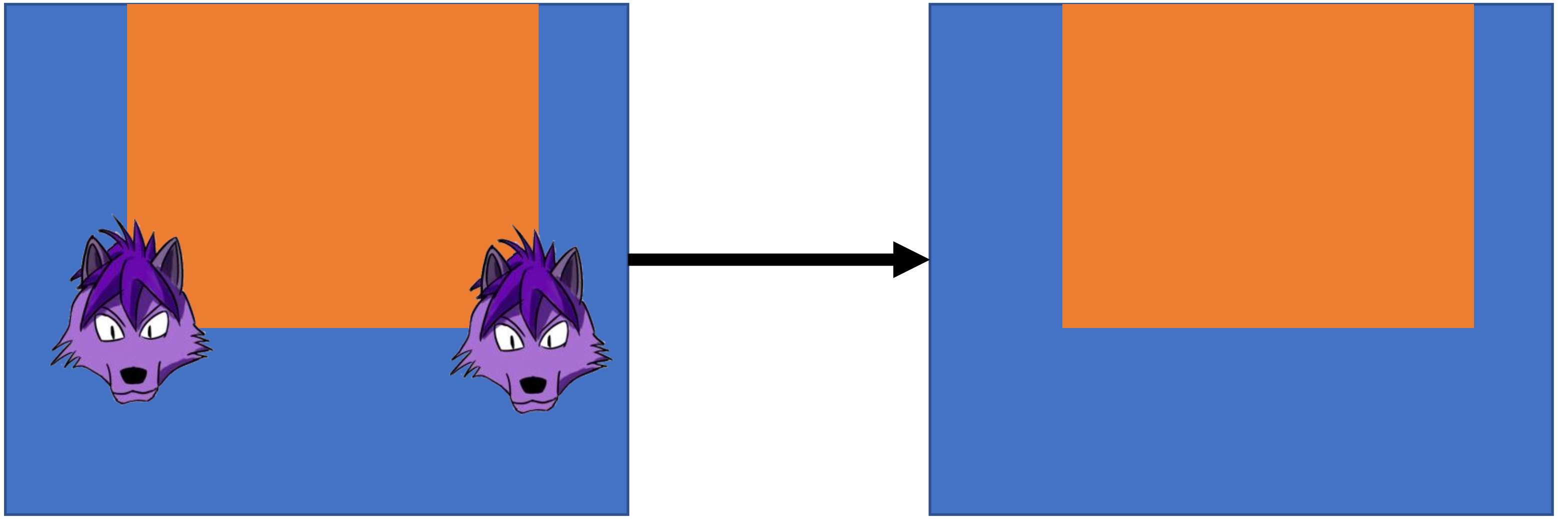
F – 配信パズル

- この問題と相性がいいのは 3 番目の解法
- **2x2 subrectangle** のうち、黒マスの個数が奇数のもの(以下、狼と呼びます)が「いくつ」「どこに」あるかが大事
- 場合分け
- 狼が0匹の場合
  - 操作Aをしなくても達成可能
- 狼が1匹の場合
  - 右図のオレンジの長方形に操作Aを行えば狼は0匹になります



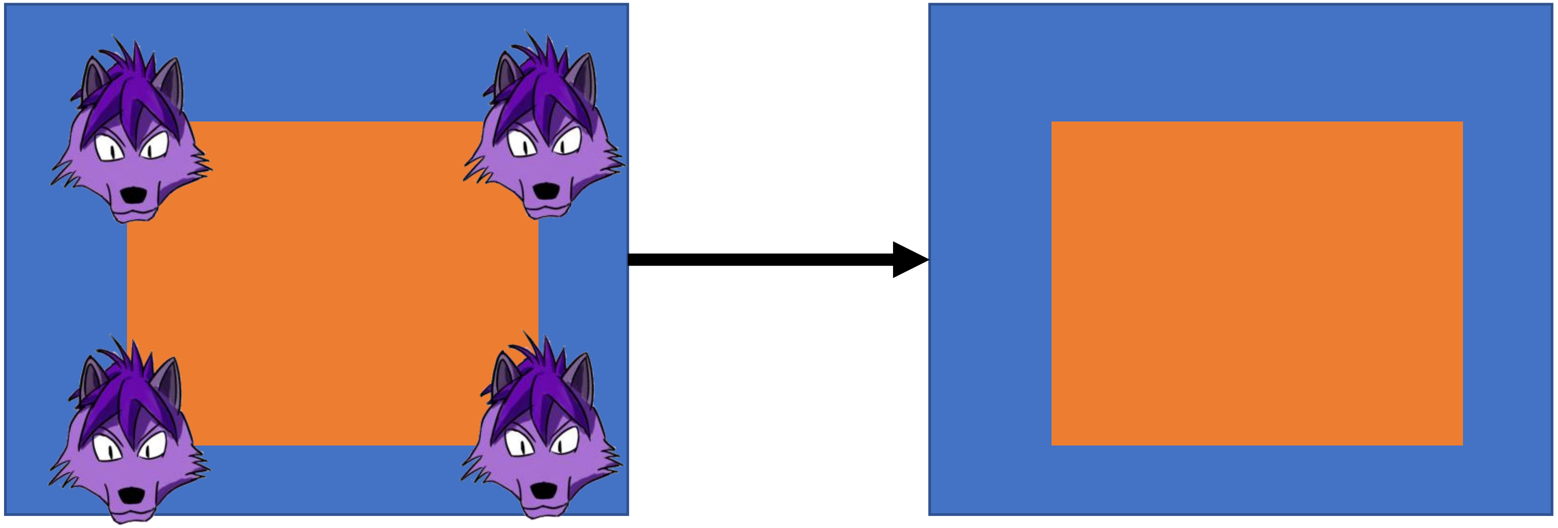
F – 配信パズル

- 狼が2匹の場合
  - 同じ行もしくは列に狼が2匹いる場合のみ、オレンジ色の長方形に操作Aを行うことで狼が0匹にできます



F – 配信パズル

- 狼が4匹の場合
  - (x1,y1),(x1,y2),(x2,y1),(x2,y2)の4点にいる場合のみ、オレンジ色の長方形に操作Aを行うことで狼が0匹にできます



F – 配信パズル

- その他の場合
  - 無理です
- 点の更新
  - 周囲最大4つのsubrectangleの黒マスの個数をアップデートすればOKなので、クエリあたり定数個の要素を変更するだけです
- 狼をどう管理する？
  - ~~https://goo.gl/hFrRWs に書いてある~~
  - setを使う
  - いくつの行(r)、いくつの列(c)に狼がいるかを持っておく。0≤ r,c ≤ 2 かつ rc = (狼の総数) ならOK

G: Following Permutations

問題概要

- $1, 2, \ldots, N$ の置換 p であって、$1 \leq i \leq M$ について以下の条件を満たすものの個数を (mod $10^9 + 7$ で) 求めよ
  - 辞書順で p の A_i 個あとの置換 q があって、$q_{B_i} = C_i$
- $N, M, A_i \leq 50$

解法

- $A = \max(A_1, \ldots, A_M)$ とする
- 以下のパラメータ x, y, z を決めると、条件を満たす置換は階乗や二項係数から求められる
  - p の最初 x 項は p の A 個あとの置換まで変わらない
  - p の $(x + 1)$ 項目は p の y 個あとの置換で初めて変わる
  - p の y 個あとの置換の $(x + 1)$ 項目は $(x + 1), \ldots, N$ 項目のうち z 番目に小さい
- x, y, z を全探索すれば良い

H: 三角形と格子点

問題概要

- 平面上の三角形 ABC に対して、$f(ABC)$ を三角形 ABC の内部 (周上除く) に存在する格子点の個数とする
- 以下の条件を満たす三角形 ABC すべてについての $f(ABC)$ の和を (mod 10^9+7 で) 求めよ
  - A は $[X_1, X_1+W) \times [Y_1, Y_1+H)$ の格子点
  - B は $[X_2, X_2+W) \times [Y_2, Y_2+H)$ の格子点
  - C は $[X_3, X_3+W) \times [Y_3, Y_3+H)$ の格子点
- $X_i, Y_i \leq 10^{12}, W, H \leq 40000$
- ABC はいつでも反時計回りに三角形をなす

ピックの定理

- 以下の定理を使う

ピックの定理
平面上の格子点を結んだ多角形の
- 面積を A
- 内部の格子点の個数を i
- 周上の格子点の個数をb

とすると、
$$A = i + \frac{b}{2} - 1$$

中間目標

- 条件を満たす三角形の
  - 面積の和
  - 周上の格子点の数の和

  を求めれば良い
- 面積の和は簡単
  - 面積の平均が
    $$\frac{1}{2}|(X_2 - X_1)(Y_3 - Y_1) - (X_3 - X_1)(Y_2 - Y_1)|$$
- 周上の格子点の数の和を求めたい

周上の格子点

(適当に文字を置き換えて)以下を求めれば良い

$$\sum_{i_1,i_2}\sum_{j_1,j_2}\gcd(A+i_1+i_2, B+j_1+j_2)$$

a を数列 $[1, 2, \dots, W-1, W, W-1, \dots, 1]$

b を数列 $[1,2, \dots, H-1, H, H-1, \dots, 1]$

とすると、求めるべきは

$$\sum_{i}\sum_{j} a_i b_j \gcd(A+i, B+j)$$

ループの変形

- $\gcd(A+i, B+j)$ は j の値によらず $A+i$ の約数
- i を固定したときの j に関するループを $A+i$ の約数に関するループに変形できないか？

$$\sum_j b_j(A+i, B+j)$$
$$= \sum_{d:\, d|(A+i)} \left(\sum_{j:\, d|j} b_j \right) f(d)$$

等差数列の和なので $O(1)$ 時間で求まる

$d|(A+i)$：
d は $A+i$ の約数

となる f があるとよい

オイラー関数

前のページの f としてオイラー関数 ϕ がとれる

オイラー関数 $\phi(n)$ を
- $\phi(p^e) = p^{e-1}(p-1)$
- $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ (a, b は互いに素)

と定義すると、

$$\sum_{d|n} \phi(d) = n$$

実験して $f(p) = p - 1, f(pq) = (p-1)(q-1)$
などを計算すればきっと思いつきます

約数の列挙

- あとは $A, A+1, \ldots$ について約数とそのオイラー関数の値を高速に求められれば良い
- 区間篩を用いて $A, A+1, \ldots$ を素因数分解しておけば約数は高速に列挙できる
- 約数の列挙と同時にオイラー関数の値も計算できる
  - 区間篩: エラトステネスの篩の亜種

  詳しくは調べてください

解法まとめ

- ピックの定理を用いてもとの問題を gcd の和を求める問題に変形
- オイラー関数を用いてループの一つを約数に関するループに変形
- 区間篩を用いて約数とそのオイラー関数の値を列挙

すれば解ける

長さ $O(H)$ の区間に含まれる整数の約数の個数の和は $O(H \log H)$ であるので十分高速