

## ARC 053 解説

### A : ドミノ色塗り

解法

答えは  $H(W - 1) + (H - 1)W$  通り.

まず, 左右に隣り合う 2 マスを塗る方法が何通りか考えます. 左右に隣り合う 2 マスを塗るとき, 左のマスとしてあり得るものは, 図 1 の ☆ のマスです. 左右に隣り合う 2 マスを塗る方法は ☆ の個数に等しいので,  $H(W - 1)$  通りです.

同様に, 上下に隣り合う 2 マスを塗る方法は  $(H - 1)W$  通りです. よって, 答えは  $H(W - 1) + (H - 1)W$  通りとなります.

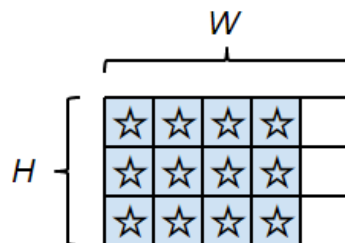


図 1

### B : 回文分割

解法

文字列  $S$  の長さを  $N$  とする. また, 26 種類のアルファベットのうち, 文字列  $S$  に奇数回現れるものが  $K$  種類であるとする. すると, 答えは次式. 計算量は  $O(N)$ .

$$\begin{cases} N & (K = 0) \\ 2 \lfloor \frac{N-K}{2K} \rfloor + 1 & (1 \leq K \leq 26) \end{cases}$$

$K = 0$  の場合、すべてのアルファベットが偶数個ずつあります。そのため、同じアルファベット同士のペアを  $N/2$  組作り、それらを左右対称に並べることで、1 個の回文を作ることができます。よって、答えは  $N$  です。

$K = 1$  の場合、1 種類のアルファベットのみが奇数個です。このアルファベットを中央に置くことに決めると、残り  $N - 1$  文字はすべてのアルファベットが偶数個ずつあります。そのため、同じアルファベット同士のペアを  $(N - 1)/2$  組作り、それらを左右対称に並べることで、1 個の回文を作ることができます。

$K = 2$  の場合、2 種類のアルファベットが奇数個です。この場合、少なくとも 2 個の回文に分割する必要があります。ここでは 2 個の回文に分割することにして、奇数個である 2 種類のアルファベットをそれぞれの中央に置くことに決めます。すると、残り  $N - 2$  文字はすべてのアルファベットが偶数個ずつあり、同じアルファベット同士のペアを  $(N - 2)/2$  組作ることができます。より短い方の回文の長さ  $X$  をできるだけ大きくしようとすると、ペアをできるだけ均等に割り振るのがよいことがわかります。よって、より短い方の回文には  $\lfloor (N - 1)/4 \rfloor$  組のペアが割り振られ、答えは  $X = 2\lfloor (N - 1)/4 \rfloor + 1$  となります。

一般の  $1 \leq K \leq 26$  の場合も、 $K = 2$  と同様に考えると、答えは  $2\lfloor (N - K)/2K \rfloor + 1$  となることがわかります。

## C : 魔法使い高橋君

### 解法

$N$  個の魔法を唱える順番を 貪欲法 で決める。  $a_i < b_i$  の魔法をグループ 1 とし、  $a_i \geq b_i$  の魔法をグループ 2 とする。まず、グループ 1 の魔法を  $a_i$  の昇順にソートし、その順番に唱える。続いて、グループ 2 の魔法を  $b_i$  の降順にソートし、その順番に唱える。このときの  $X$  が答えである。計算量は  $O(N \log N)$ 。

とりあえず、グループ 1 の要素だけしかない場合を考えてみます。このとき、 $a_i$  の昇順にソートした順番が最適であることを示します。ある順番において、ある隣接要素  $i, i + 1$  が  $a_i \geq a_{i+1}$  であったとします。すると、図 2 からわかるように、 $X$  の値を増加させずに  $i$  と  $i + 1$  をスワップできます。よって、任意の順番は  $X$  の値を増加させずに  $a_i$  の昇順にソートできることがわかります。以上より、 $a_i$  の昇順にソートした順番が最適であることが示せました。

同様にして、グループ 2 の要素だけしかない場合も、 $b_i$  の降順にソートした順番が最適であることが示せます。

では、グループ 1 の要素とグループ 2 の要素が混ざっている場合はどうでしょうか？ ある順番において、ある隣接要素  $i, i + 1$  がそれぞれグループ 2, グループ 1 であったとします。すると、図 3 からわかるように、 $X$  の値を増加させずに  $i$  と  $i + 1$  をスワップできます。よって、任意の

順番は  $X$  の値を増加させずに、(グループ 1 の要素たち)  $\rightarrow$  (グループ 2 の要素たち) という順番に並べ替えられることがわかります。グループ 1 の要素とグループ 2 の要素が完全に分離されていれば、 $X$  の値を増加させずに、グループ 1 を  $a_i$  の昇順にソートし、グループ 2 を  $b_i$  の降順にソートできます。以上より、(グループ 1 を  $a_i$  の昇順にソートしたもの)  $\rightarrow$  (グループ 2 を  $b_i$  の降順にソートしたもの) という順番が最適解であることが示せました。

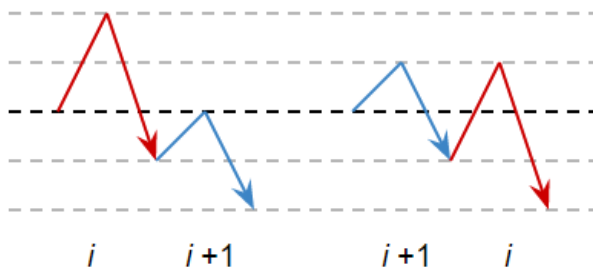


図 2

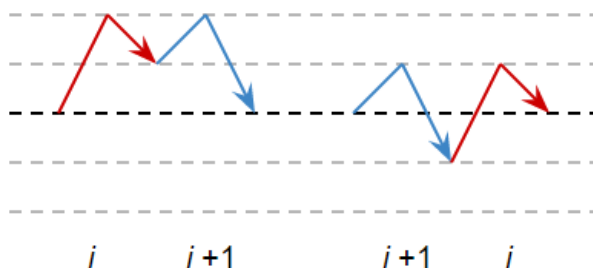


図 3

## D : 2 つの山札

まずは、問題を視覚的に捉えましょう。例えば、サンプル 3 を視覚的に表すと、「図 4 のグリッドグラフにおいて、左上の点から右下の点まで移動するとき、パス上の数列は何通りか？」という問題になります。

グリッドグラフのパスの数は、動的計画法 (DP) の典型問題として有名です。この DP では、 $dp[i][j] :=$  (点  $(i, j)$  までのパスの個数) と定義して、 $dp[i][j] = dp[i-1][j] + dp[i][j-1]$  という漸化式を計算します。もちろん、この DP ではパス上の数列を正しく数え上げられません。例えば図 4 では、数列  $(3, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5)$  を 2 重に数えてしまいます。これは、ある数列に対応する終点が複数個あり得ることが原因です。例えば図 5 では、数列  $(3, 3, 3, 3, 5, 5)$  に対応する終点が 2 個あります  $((2, 4), (4, 2))$ 。

パス上の数列を正しく数え上げるためには、次のような工夫が必要です。ある数列に対応する終点が複数個あり得ることに対応するため、 $dp[S] :=$  (あり得る終点の集合が  $S$  であるような数列の

個数) と定義します. 例えば図 5 では, あり得る終点の集合が  $\{(2, 4), (4, 2)\}$  であるような数列は  $(3, 3, 3, 3, 5, 5)$ ,  $(3, 3, 4, 4, 4, 4)$  の 2 通りなので,  $dp[\{(2, 4), (4, 2)\}] = 2$  となります. このように定義した  $dp[S]$  をすべて計算した後,  $dp[\{\text{右下の点}\}]$  を参照すると正しい答えが求まります.

しかし,  $S$  をそのまま状態として持つと DP の状態数が大きくなりすぎるので, より効率的な状態の持ち方を考えなければなりません. 実は, 「数列の長さ」と「数列の末項」がペアで指定されると, 対応する  $S$  は高々 4 通りしかないことがわかります. よって,  $dp[l][p][S] := (\text{長さが } l \text{ かつ末項が } p \text{ の数列であって, あり得る終点の集合が } S \text{ であるものの個数})$  と定義すると, DP の状態数が  $O(N^2)$  に抑えられます. さらに, 各状態からの遷移も高々 4 通りしかないことがわかります. 以上より, 全体の計算量が  $O(N^2)$  に抑えられ, DP で問題を解くことができます.

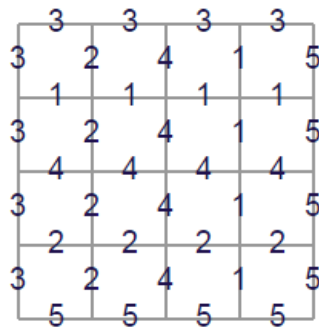


図 4

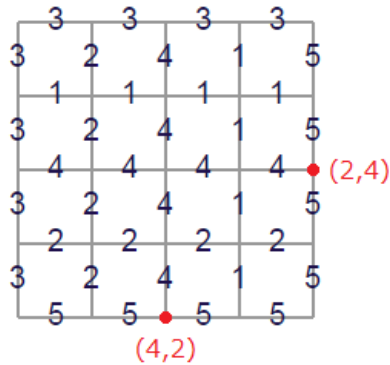


図 5