KUPC2024 解説

KUPCスタッフ(Writer/Tester/会場運営等): TKTYI, sheyasutaka, cn449, KumaTachiRen, physics0523, TKO, yuma220284, kencho, naniwazu, makichan, Capo, jastaway, yamadanull, m1une, tatesoto, fluorine, RunningOutRate, kmmtkm

Special Thanks(外部tester): IH19980412

解説の順番について

作問班の想定難易度順となっています。具体的には

E -> A -> D -> J -> B -> P -> M -> N -> K -> H -> C -> I -> L -> O -> G -> F

の順番です。

E - Enumerate Multiplication Table

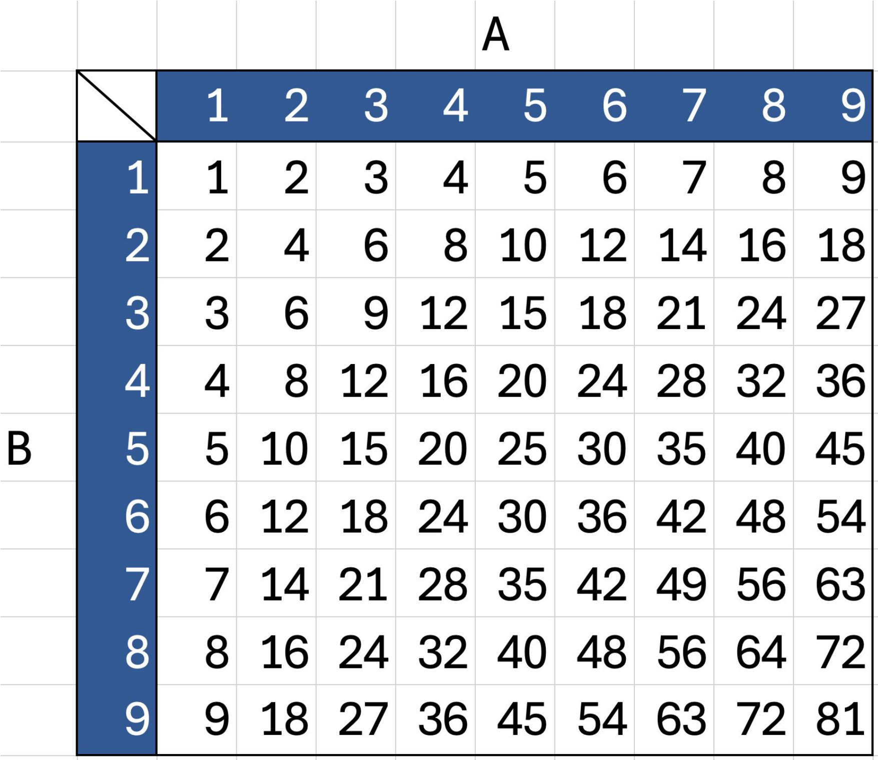
Writer・原案: TKO

問題概要

- 9×9の掛け算表を完成させて、81個の数字の和を求める

- 右のようにA=(1...9), B=(1...9)のとき答えは2025

- Happy new year!



A

B

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

E - Enumerate Multiplication Table

- i=0..8, j=0..8で二重ループを回してans += A[i] * B[j] とすればよい
- 答えが32bit整数型(C++のintなど)の最大値を超えることがあるので注意

- (A[0] + … + A[8]) * (B[0] + … + B[8]) で解くこともできる

A - Annual Tuition

Writer・原案: kencho

問題概要

- 初項が正整数、公差が非負整数の等差数列がたくさんあります
- 全ての等差数列の i 番目を比較したとき1番目の等差数列が最小となるような i は存在しますか？

A - Annual Tuition

- 等差数列のペアごとに考えて、

  京大≦他校 となるような非負整数 i の区間を求めましょう

- 初項・公差の大小関係で場合分けすると良いです

D - Detonate a Dynamite

Writer: TKO　　原案: yamadanull

問題概要

・2次元平面上に地雷がたくさん

・同じX、Y座標上の地雷が誘爆する

・任意の1箇所を爆発させて、誘爆する地雷数を最大化

制約：N≦2×10^5

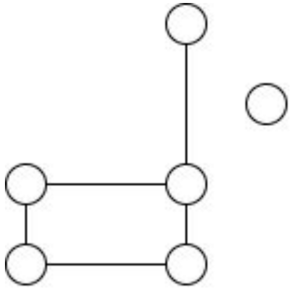
D - Detonate a Dynamite

愚直に辺をつなぐと辺数がO(N^2)になるので、適宜まとめる

地雷を1つ追加して、新しい地雷を含む連結成分の個数を最大化

全て連結なら答えはN+1

グループが複数あるときは…？

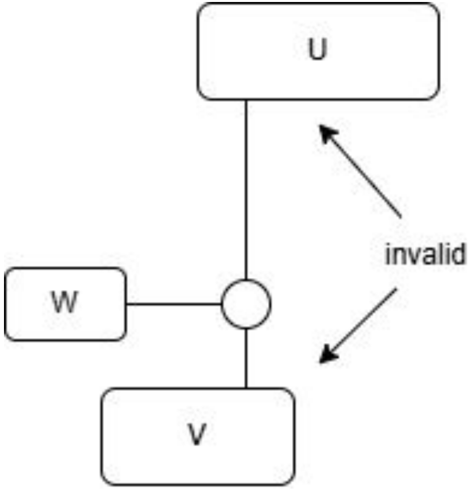


D - Detonate a Dynamite

サイズの上位2個+1が答え

証明：ある連結成分U,Vについて、UのあるX座標をVのあるY座標を指定すれば|U|+|V|+1が達成可能

逆に、3つの連結成分をつなぐ1点がある場合、既につながっているペアが存在するので矛盾



J - Joint for KUPC

Writer・原案: physics0523

問題概要

文字列 S を何度か繰り返して、K, U, P, C からなる長さ k の文字列全てを (連続でなくともよい) 部分列として含むようにせよ

J - Joint for KUPC

解説

k が小さいなら、K, U, P, C のうち最も遠くにある文字を貪欲に採用すればよい

Q. k <= 10^18 なら？
A. この貪欲をダブリングに載せればよい！

S^2 で始点を決め打った時に K, U, P, C のうち最も遠くにある文字がどこにあるかを予計算しておけば、その結果を使ってダブリングができます

B - Brindled Torus

Writer・原案: kencho

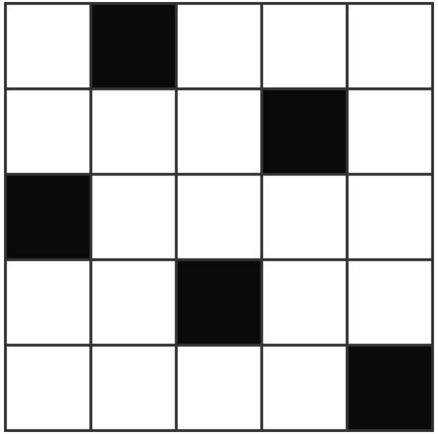
問題概要
次の条件を満たす二次元グリッドトーラスを1つ構築せよ
・各マスが白か黒で塗られている
・各マスは少なくとも1つの異なる色のマスと隣接する
・白マスの数 : 黒マスの数 = A : B

制約
・0≦A, B≦1000
・A+B＞0
・AとBは互いに素

B - Brindled Torus

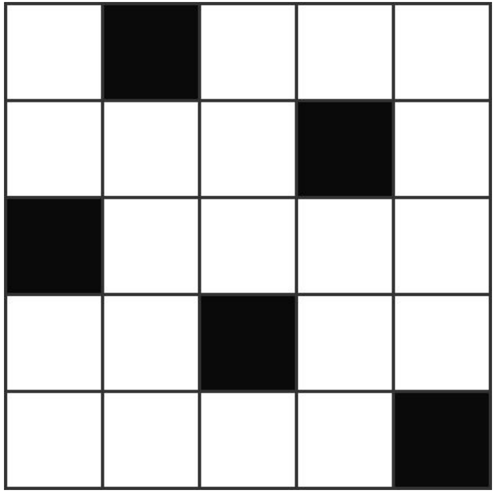
- まずはどこから不可能になるか考える

- 白マスが黒マスの4倍を超えると、隣接する黒マスが足りない
- ちょうど4倍だと…？ →

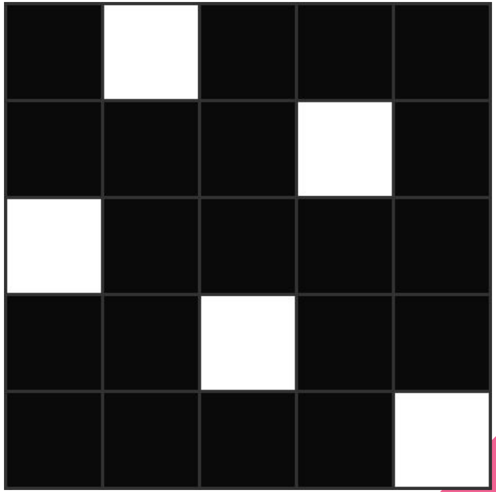


B - Brindled Torus

- 解法1
- 1:4 と 4:1をシンプルに並べてA:Bを実現(ただし片方スライドする必要)



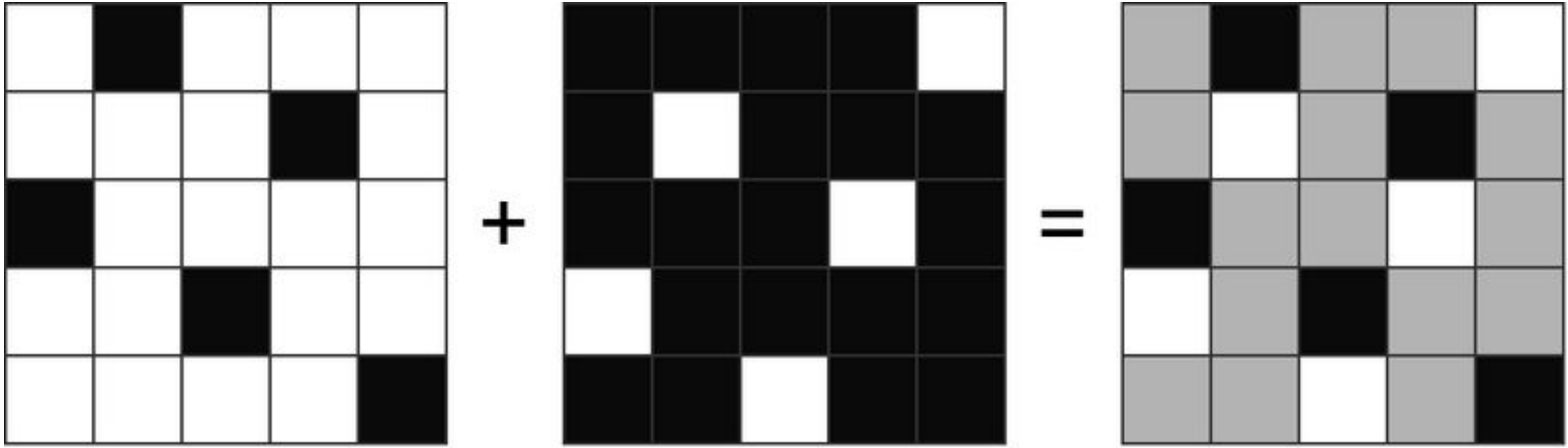
を4A - B個



を4B - A個

B - Brindled Torus

- 解法2
- 1 : 4 と 4 : 1を重ねて任意マスを作る！



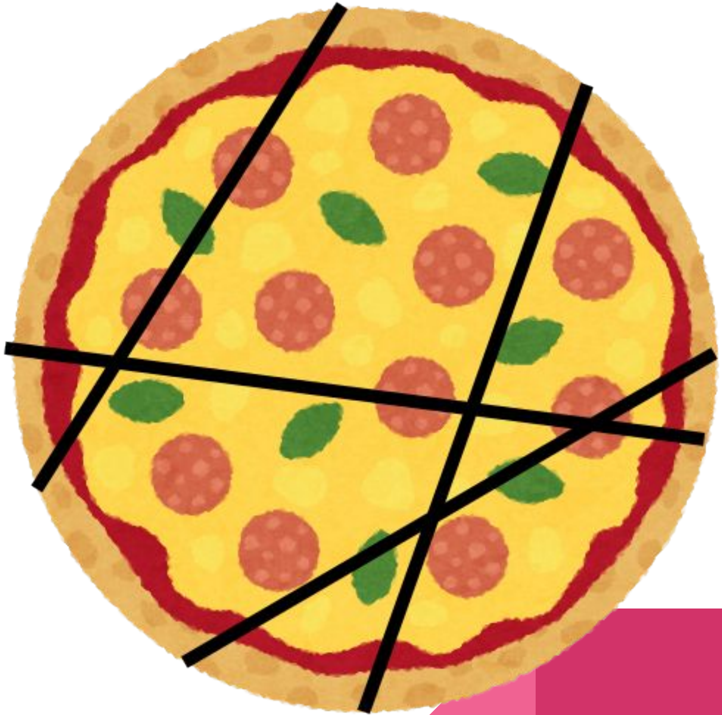
P - Pizza Destruction

Writer・原案: kencho

問題概要

- 円形のピザの周上をN等分する
N点のうち、指定されたM個の点
（重複あり）それぞれを通る
ランダムな角度の直線でピザを
M回切断する

- 分割数の期待値は？



P - Pizza Destruction

- 切断の回数が決まっているとき、分割される数は
  ピザの内部にある切断線の交点の数にのみ影響されます
- 期待値の線形性より、切断のペアそれぞれについて、
  切断の線分がピザの内部で交わる確率を考えればよいです
- この確率は端点間の距離にのみ依存し簡単な二次式で書けるため、
  愚直に計算すると O(M^2) 、いい感じに式をまとめることで O(M) + sort
  で総和を求められます

M - Mahjong 2

Writer・原案: TKO

問題概要

・1~Nの数字が書かれたカードがあり、1枚追加して次の条件を満たしたい

- 同じ数字、または連続した数字の書かれた3枚を抜くことを繰り返して空にすることができる

・追加できるカードを列挙

制約：N≦5×10^5

部分点：N≦2000

M - Mahjong 2

部分点

判定を線形時間で出来ればよい

同じ数字を3枚：操作1　連続する数字を3枚：操作2とする

このとき、操作は可換・同じ組に対する操作2の回数は2回までとしてよい

→　操作2の回数は左端からmod3で一意に決まる

M - Mahjong 2

満点

カードKを追加しても各組の操作2の回数はそこまで変化しない

→　左端・右端からの処理を前計算する　途中でinvalidならNo

　　Kを追加するクエリでは両端からKの手前まで処理した列上で判定問題を解く（長さは高々5）

全体でO(N)

N - Nonsymmetric Matrix

Writer・原案: cn449

問題概要

各成分が整数である N 行 N 列の行列であって以下の条件を満たすものは存在するか？存在する場合 max|A[i][j]| が最小になるものを構成せよ。

- 各行の数の和が 0
- 各列の数の和が 0
- $i \neq j$ のとき $A[i][j] \neq A[j][i]$

N - Nonsymmetric Matrix

- N = 1 → ((0))
- N = 2 → No
- N の偶奇で場合分け

- N : 奇数のとき
- A[i][i] = 0 とする
- i > j のときは偶奇が一致しているとき A[i][j] = 1, していないとき A[i][j] = -1
- i < j のときは偶奇が一致しているとき A[i][j] = -1, していないとき A[i][j] = 1

N - Nonsymmetric Matrix

- N : 偶数のとき
- N = 4 のときは max |A[i][j]| = 1 の解はない
- max |A[i][j]| = 2 の解は適当に探索を書くか手で解けば見つかる
- N >= 6 のときは max |A[i][j]| = 1 の解がある
- 2 × 2 のブロックに分ける 上から i 番目、左から j 番目のブロックを (i, j) と書く
- (1,1) を ((1,1),(-1,-1)), (1,N/2) を ((-1,-1),(1,-1)), (N/2,N/2) を ((-1,1),(-1,1)) とする
- (i, i) を ((-1,1),(-1,-1)), (i, i+1) を ((1,-1),(1,1)) とする
- (i, j) を i < j のとき ((1,-1),(1,1))、i > j のとき ((0,0),(0,0)) とする

K - Kyoto the Capital

Writer: TKO　　原案: kencho

問題概要

・K,Y,O,TをN文字ずつ用いた文字列で、”KYOTO”を部分文字列に含み
”TOKYO”を部分文字列に含まないものは何通り？

制約 : N≦500
部分点 : N≦50

K - Kyoto the Capital

部分点

DP[x][y][z][w][state]:「Kをx個、Yをy個、Oをz個、Tをw個用いた文字列で、suffixが”KYOTO”,”TOKYO”にマッチした個数をstateで表したときの個数」

stateとして考えるべきは雑にやっても5*5*2=50通り

K - Kyoto the Capital

満点 (by cn449)

答えは「TOKYOを含まない」-「KYOTO,TOKYOをどちらも含まない」

どちらも包除原理で計算

「TOKYOを含まない」の方はeasy

（TOKYOを置く個数・位置を決めてから残りの文字を置く通り数を掛ける）

K - Kyoto the Capital

満点 (by cn449)

「KYOTO,TOKYOをどちらも含まない」を考える

KYOTO,TOKYOを置いたとき2つが重なることがある（KYOTOKYOなど）

区間の長さが5の倍数のときに-1倍の重みがかかる

TO,KYOに分解すると、それぞれ使った個数から残った文字の個数が決まる

区間の個数、TO・KYOの個数でDPするとO(N^3)

H - Hack Hash

Writer: physics0523　　原案: makichan

問題概要

- Zobrist hashによる多重集合の判定問題に対し衝突を誘発する入力を作る

- ハッシュ値にはmod 998244353 の積が用いられている

- 制約：$N+Q \leqq 10^6$

H - Hack Hash

- $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times} \cong (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z},+)$であることを利用
- 多重集合の各要素の個数をp-1の約数Mに揃えると衝突確率がM倍になる
- A=(1,…,1,2,…,K),B=(K+1,…,2K)のようにM個ずつをKセット並べたものを用意
- A,Bそれぞれ${}_{K+1}C_2$通りずつの区間から$({}_{K+1}C_2)^2$通りのクエリをつくる
- M,Kを調整すると衝突確率が99%を超える

C - Cake-Cutting Ceremony

Writer: kencho, TKO　原案: kencho

問題概要

・各マスが黒、赤、白で塗られたN×Nグリッドがある

・このグリッドを1本の直線で2つに分け、
黒の面積と赤の面積を同時に2等分できますか？

C - Cake-Cutting Ceremony

→実は常に可能！(パンケーキの定理で検索しましょう)

詳細はAtCoder解説ページへ

実装する際には、
・直線が格子点を通るケース(特に |傾き| = 1の場合)
・二分探索のEPS
・その他計算誤差
に気をつけましょう

I - I Hate Xor Sum

Writer: KumaTachiRen　　原案: m1une

問題概要

・非負整数からなる長さNの数列で、総和が S (1 ≦ S ≦ M) であるものすべてについてスコアの総和を求めよ
・スコア : 数列の隣接項のXORを取ることを繰り返して出てくる値の総和

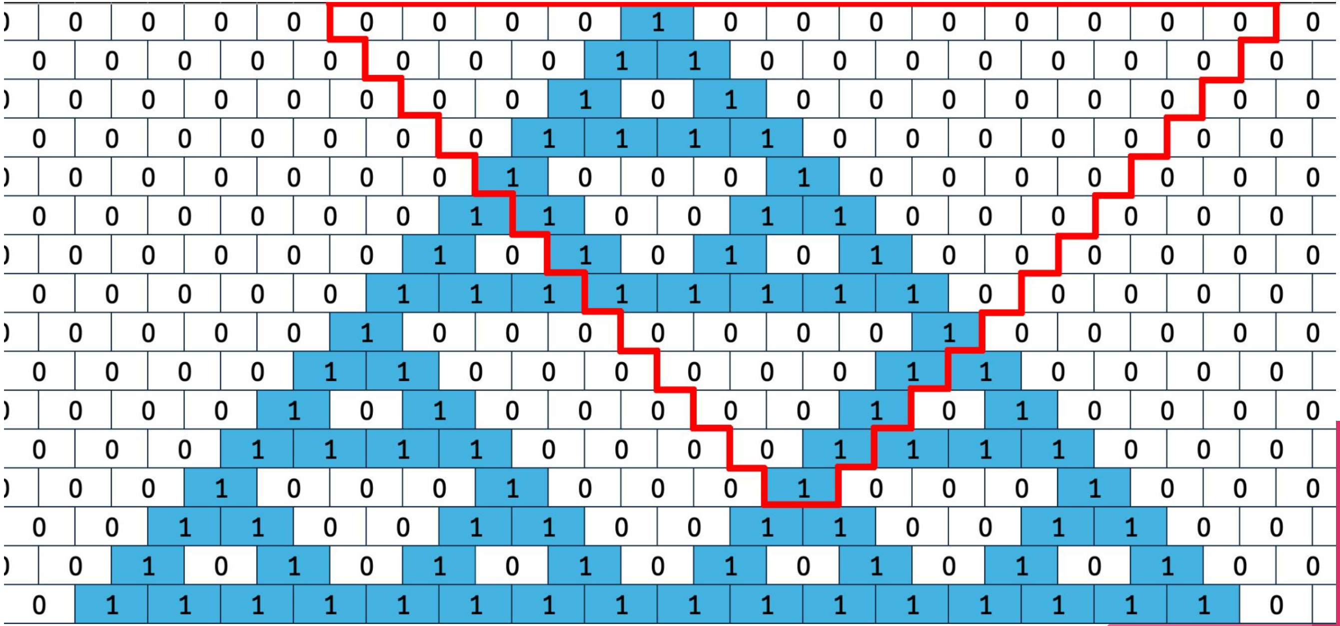
・$1 \leqq N \leqq 10^9, 1 \leqq M \leqq 10^5$

部分点1: $M=1, N \leqq 3000$ (1点)
部分点2: $M=1, N \leqq 10^6$ (1点)

I - I Hate Xor Sum

部分点解法　シェルピンスキーのギャスケットを考える

例: N=13, S=1 で A = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) のとき



0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0

I - I Hate Xor Sum

部分点解法

赤線で囲まれた範囲の1の個数がスコア

この範囲の横移動を考えると、
ギャスケットの k 段目(0-indexed)は n - k 回答えに寄与する

ギャスケットを愚直に構築すれば$O(N^2)$　(1点解法)

2べきでの周期性を考えるとギャスケットのk段目の1の個数を
全体として$O(N)$で求められる (2点解法)

- 実はギャスケットのk段目の1の個数は $2^{popcount(k)}$ で表せる

I - I Hate Xor Sum

満点解法

二進表記の桁ごとに考えると A が 01 列のとき解ければ OK

k 段目のあるマスに着目するとそこに寄与する A の index は $2^{\mathrm{popcount}(k)}$ 個
その中から奇数個(=i)，残り N-$2^{\mathrm{popcount}(k)}$ 個から S-i 個選ぶ場合の数を足し合わせ

$$\sum_{k=0}^{N-1}(N-k)\sum_{i:\mathrm{odd}}\binom{2^{\mathrm{popcount}(k)}}{i}\binom{N-2^{\mathrm{popcount}(k)}}{S-i}$$

popcount(k) が同じ k はまとめて考えられる（係数は桁dpなど）
→ 長さ M の畳み込み O(logN) 回で OK

L - Long Street

Writer・原案: TKTYI

問題概要

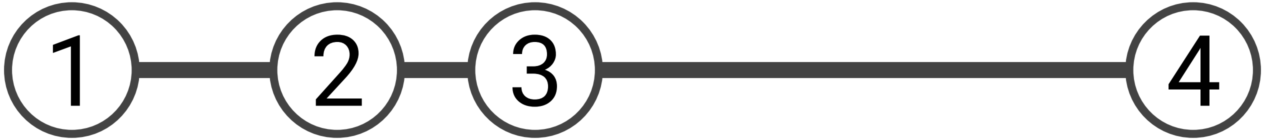
・数直線上に N 点並んでいる
点 i と点 i+1 の距離は 2^P[i]（P:順列)

・ジャッジは x を隠し持っている
何回か質問して x を当ててください
質問 : 点 i は点 x から何番目に近いか聞く

制約 : N≦2e5, Q≦log_2(N)

L - Long Street

入出力例 (N=4, P=(2, 1, 3), x=2)



? 4 → 4 x=1,2,3

? 1 → 3 x=2,3

? 2 → 1 x=2

L - Long Street

解法

観察：x の候補は高々2つの区間をなす

→ おおよそ再帰的に質問をしていけばうまくいく

初手で x の候補を N/2 個以下にするような i が選べるか？

→ 常に可能、高速に取得できる（証明はAtCの解説参照）

乱択でもAC可能

O - Ordinary Blossom Algorithm

Writer・原案: TKO

問題概要

・頂点重み付き木が与えられる
・次の操作を繰り返して1頂点にしたい

- 根からのパスを選んで縮約し、パスの重みを根の重みにしてコストに加算

・操作回数最小のうち、コストのminとmaxを求める

制約：N≦2×10^5

O - Ordinary Blossom Algorithm

解法

操作回数の最小値は葉の個数Lと一致

主客転倒を考えると、コストは以下と同じ

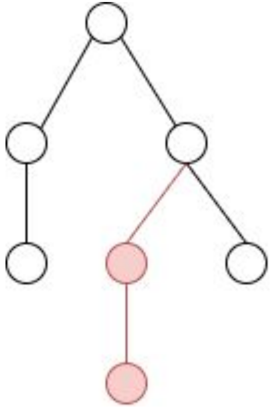
・葉に1~Lをそれぞれ書き込んだときの、全ての頂点vについてのW_v×「部分木内の葉の値」の総和

O - Ordinary Blossom Algorithm

最大化

逆から見ると、実は次のGreedyが成立

・ある葉から子を2つ以上持つ先祖までのパスで重み最小のものを取り除き（重みSとする）、i回目の操作ならコストにiSを加算



セグ木・priority queueなどでO(N log N)でシミュレーション可能

O - Ordinary Blossom Algorithm

最小化

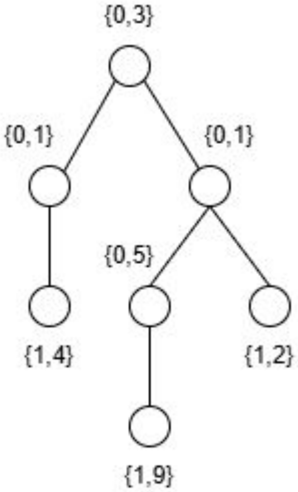
取り除いたパスをつなげるとトポロジカルソートになる

葉までたどり着いたらW_vの係数が1減る

頂点に’0’を0 or 1個（葉であるかどうか）+’1’をW_v個の文字列

ソート順につなげた文字列の転倒数最小化

→　01 on Tree（係数の比の最大値を取るvと、その親をmerge）



G - Genjikou

Writer: TKO　　原案: sheyasutaka

問題概要

1...Nの分割に対応する図をどのように書いても連結なとき、良い分割
各部分集合の要素数が[A,B]に入る良い分割の個数 mod 998

制約：N≦10^5

G - Genjikou

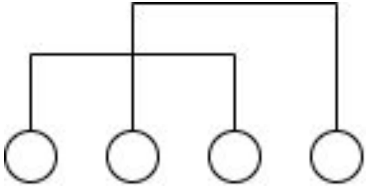
1. 条件が部分集合のサイズだけのとき

左端を含む部分集合のサイズで場合分けすると漸化式が立つ

部分集合に対応するEGFをg(x)、サイズの条件を満たす分割の個数のEGFをf(x)として、f=exp gが成立

→ FPS expでO(N log N)
(https://judge.yosupo.jp/problem/exp_of_formal_power_series)

G - Genjikou



２. 良い分割の個数

右図のような4つ組があると、2つの分割が連結に

任意の分割から、左端を含む連結成分を抜き出すと良い分割

他の部分集合を挿入する方法を掛けて計上すると漸化式が立ち、

整理するとFPS合成の形になっている

FPS 合成invでO(N log^2N) (https://noshi91.hatenablog.com/entry/2024/03/16/224034)

Lagrange反転でO(N log N)

F - Find x

Writer: cn449　　原案: tatesoto

問題概要

非負整数 N,M が与えられる。
10^{18} 以下の正整数 x であって $x^x \equiv N \pmod{M}$ を満たすものが存在するか判定し、
存在すれば一つ求めよ。

制約 : $0 \leq N < M \leq 10^9$

F - Find x

部分点解法

- Fermat の小定理より、$x \equiv N \pmod{M}$ かつ $x \equiv 1 \pmod{M - 1}$ を満たす x が解となる
- $\gcd(M, M - 1) = 1$ よりこのような x は常に存在
- 具体的に $x = M^2 - MN + N$ ととれる

F - Find x

満点解法

- $M = \Pi p_i ^ {e_i}$ と素因数分解
- 小さい範囲(x <= 30 とか)を全探索することで $p_i \mid x$ と $p_i^{e_i} \mid x^x$ が同値としてよい
- mod m で r という条件を具体的に与えていく
- 各素因数ごとに適当に与えてしまうと条件が干渉して困る
- 素因数の小さい順に処理し、できるだけ「m の倍数」という条件を与えないようにするとうまく回る

F - Find x

- 素因数 p_i が小さい順に処理
- まずは mod p_i での条件を満たすことを目指す
- N の mod p_i における原始根を r、r^s ≡ N (mod p_i) なる s を取る
- N の mod p_i における位数は (p_i - 1) / s
- この位数に反するような mod p_i - 1 での条件が定まっていたら解はない
    - 例えば、p_i - 1 の約数 v について mod v で 0 という条件があったら N の位数は (p_i - 1) / v の約数にならないといけない
- そうでなければ、mod p_i での値（と mod p_i - 1 での値）を適切に設定すれば OK

F - Find x

- mod p_i^k → mod p_i^(k + 1) への持ち上げ
- q = (p_i - 1)p_i^k とする
- mod q で w という条件が定まっているとする
- (w + jq) ^ (w + jq) ≡ (w + jq) ^ w ≡ w^w(1 + jq) (mod p_i^(k + 1)) から、適切なjを選んで mod p_iq で w + jq とすればよい

- 素因数の小さい順に処理しているのでこれらの条件は干渉しない