Grades 解説

原案：Cyanmond

Writer / 解説 : しおむすび

Tester : Forested

問題概要

- 次の条件を満たす順列 P を数え上げる
- $P_i > P_{i+1}$ となる i は一つの区間をなす

問題概要

- $2 \leq N \leq 10^{18}$
- 小課題 1 : $N \leq 8$
- 小課題 2 : $N \leq 15$
- 小課題 3 : $N \leq 3000$
- 小課題 4 : $N \leq 10^6$
- 小課題 5 : 追加制約なし

小課題 1

- $N \leq 8$

全探索最高！

順列全探索して $P_i > P_{i+1}$ なる i を列挙するなどするとよいです

適切に実装をすれば計算量 $O(N! \times N)$ とかで通ります

小課題 2

- $N \leq 15$

制約からエスパーすると 2^N っぽい

順列全探索を工夫して 2^N になると言えば？

小課題 2

- $N \leq 15$

制約からエスパーすると 2^N っぽい

順列全探索を工夫して 2^N になると言えば？

bit DP

小課題 2

- $N \leq 15$

左から順に要素を決めていって、 < か、 > か、また < になったか、の 3 つの状態を持つ (いわゆる耳 DP)

計算量は $O(2^N \times N^2)$ など

埋め込みしても別に通る

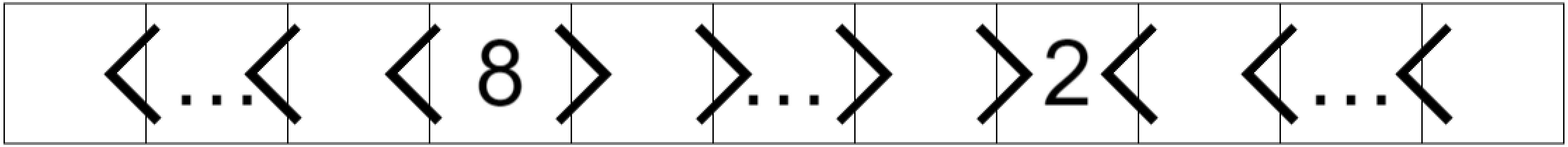
小課題 3

- $N \leq 3000$

ここからが本質

嬉しい性質を考えよう

- $N \leq 3000$

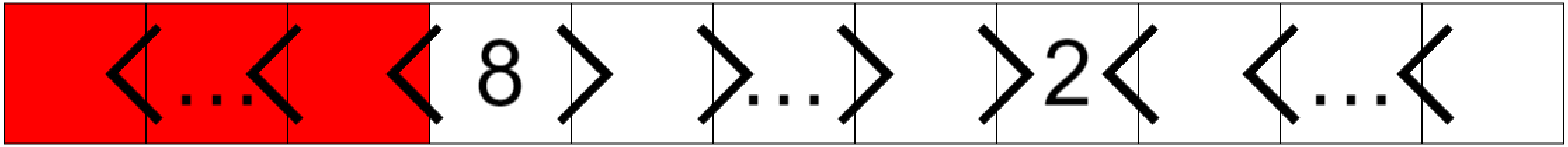


< と > の間、 > と < の間にある数を決めてみる

このとき、他の数は <>< のどの部分に入るのか？

小課題 3

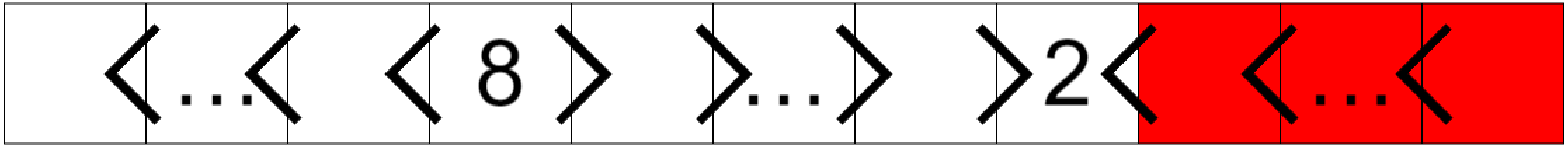
- $N \leq 3000$



1 はここにしか入らない

小課題 3

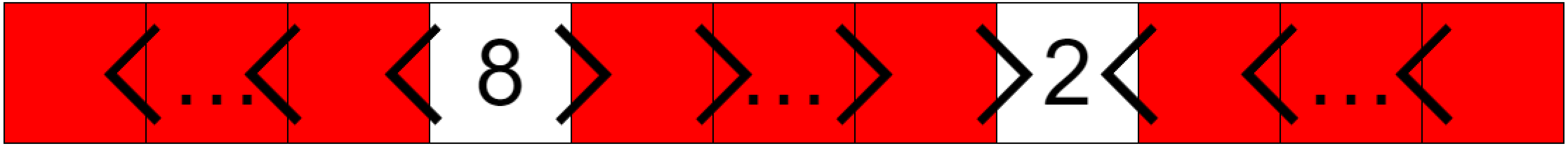
- $N \leq 3000$



10 はここにしか入らない

小課題 3

- $N \leq 3000$



5 はこのどこでも入る

小課題 3

- $N \leq 3000$

>< の間にある数字を A 、 <> の間にある数字を B とすると、

- $x < B$: 左にしか入らない
- $x > A$: 右にしか入らない
- $A < x < B$: 左、右、中央のどこにでも入る

小課題 3

- $N \leq 3000$

>< の間にある数字を A 、 <> の間にある数字を B とすると、

- $x < B$: 左にしか入らない
- $x > A$: 右にしか入らない
- $A < x < B$: 左、右、中央のどこにでも入る

また、左/右/中央について、そこに入れるやつを決めると 1 通りに定まる (不等号により順番が決まるので)

$A < x < B$ なる x の個数を s とすると、答えは 3^s になる

小課題 3

- $N \leq 3000$

よって、$1 \leq B < A \leq N$ を全探索して 3^{B-A-1} を合計すればよい

適切な前計算により計算量 $O(N^2)$ で解けた

小課題 4

- $N \leq 10^6$

ここからは高速化を頑張るだけ

$B - A - 1$ の値が同じものはまとめて計算できる

$\sum_{i=0}^{N-2} (N - 1 - i) \times 3^i$ が答え

計算量 $O(N)$

小課題 5

- $N \leq 10^{18}$

さっきの式の値を S と置く

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=0}^{N-2} (N - 1 - i) \times 3^i \\ &= (N-1) \times 3^0 + (N-2) \times 3^1 + \cdots + 1 \times 3^{N-2} \end{aligned}$$

さらに

$$3S = \sum_{i=0}^{N-2} (N - 1 - i) \times 3^{i+1}$$

小課題 5

- $N \leq 10^{18}$

$$S = (N-1) \times 3^0 + (N-2) \times 3^1 + \cdots + 1 \times 3^{N-2}$$
$$3S = (N-1) \times 3^1 + (N-2) \times 3^2 + \cdots + 1 \times 3^{N-1}$$

3^x の係数をそれぞれ引き算するとこうなる

$$2S = -(N-1) \times 3^0 + 1 \times 3^1 + 1 \times 3^1 + \cdots + 1 \times 3^{N-2} + 1 \times 3^{N-}$$
$$= -(N-1) \times 3^0 + \sum_{i=1}^{N} 3^i$$
$$= -(N-1) + 3 \times \frac{3^{N-1} - 1}{} = \frac{3^N - 2N - 1}{}$$

小課題 5

- $N \leq 10^{18}$

$2S = \dfrac{3^N - 2N - 1}{2}$ なので、 $S = \dfrac{3^N - 2N - 1}{4}$

繰り返し二乗法などを用いるとこの式は簡単に計算できるので、

計算量 $O(\log N)$ でこの問題を解くことができた