Farthest 解説

原案 / Writer / 解説 : しおむすび

Tester : Forested

問題概要

- 一部が分からない数列 B を埋めてできる数列 A のうち、
  次の条件を満たすものを数え上げろ
- i から最も離れた頂点の一つが A_i であるような木が存在する

問題概要

- $2 \leq N \leq 2 \times 10^5$
- 小課題 1 : $B_i \neq -1$
- 小課題 2 : $N \leq 20$
- 小課題 3 : $N \leq 2000$
- 小課題 4 : 追加制約なし

まず最初に

今後、頂点 a, b の最短距離を $dist(a, b)$ で表す

$N = 1$ の場合は $A = (1)$ 、 $N = 2$ の場合は $A = (2, 1)$ しかあり得ないので
場合分けすると良い

今後は $N \geq 3$ であるとする

小課題 1

- $B_i \neq -1$

この場合、$A_i = B_i$ が必ず成り立たなければいけないので、$A = B$ となる

小課題 1

- $B_i \neq -1$

この場合、$A_i = B_i$ が必ず成り立たなければいけないので、$A = B$ となる

このとき A が条件を満たせば答えは 1 、満たさなければ 0 になる

よって単なる判定問題になった

小課題 1

とりあえず必要そうな条件を列挙していく

小課題 1

とりあえず必要そうな条件を列挙していく

- $A_i \neq i$
  頂点 i と隣接する頂点 v を一つ取れば、明らかに $dist(i, v) > dist(i, i)$

小課題 1

とりあえず必要そうな条件を列挙していく

- $A_i \neq i$
  頂点 i と隣接する頂点 v を一つ取れば、明らかに $dist(i, v) > dist(i, i)$
- A に現れない頂点が必ず存在する
  実は A に現れる頂点は全て葉であることが示せる
  頂点数 3 以上のとき葉でない頂点が 1 つは存在して、その頂点は A に現れない

小課題 1

とりあえず必要そうな条件を列挙していく

- $A_i \neq i$
  頂点 i と隣接する頂点 v を一つ取れば、明らかに $dist(i, v) > dist(i, i)$
- A に現れない頂点が必ず存在する(A は順列ではない)
  実は A に現れる頂点は全て葉であることが示せる
  頂点数 3 以上のとき葉でない頂点が 1 つは存在して、その頂点は A に現れない

実はこれで十分

小課題 1

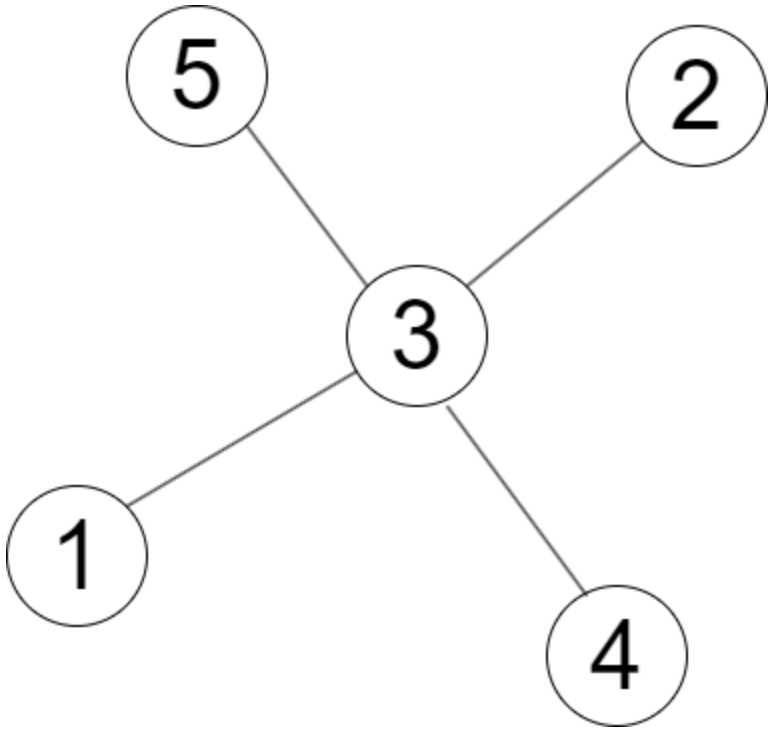
A に現れない頂点を一つ取って v とする

v から他の全ての頂点に辺を張る

このウニグラフは条件を満たす

小課題 1

例 : $A = (2, 4, 1, 5, 4)$



小課題 1

なので、

- $B_i \neq i$
- B は順列ではない

をともに満たせば 1 、どちらかを満たさなければ 0 を出力してよい

小課題 2

- $N \leq 20$

順列全列挙したら間に合わない

制約からエスパーすると 2^N っぽい

順列全探索を工夫して 2^N になると言えば？

小課題 2

- $N \leq 20$

順列全列挙したら間に合わない

制約からエスパーすると 2^N っぽい

順列全探索を工夫して 2^N になると言えば？

bit DP

小課題 2

$\mathrm{dp}[i][S] := A_1$ から A_i まで確定させて、 A に登場した数の集合が S の通り数

計算量 $O(2^N \times N^2)$ とかになる

小課題 3

- $N \leq 2000$

順列じゃないものを数えるのは難しいので、順列でないものを数えたい

小課題 3

$(A_i \neq i$ かつ順列でない A の数$)$
$=(A_i \neq i$ なる A の数$)-(A_i \neq i$ かつ順列である A の数$)$

小課題 3

$(A_i \neq i$ かつ順列でない A の数$)$
$=(A_i \neq i$ なる A の数$)-(A_i \neq i$ かつ順列である A の数$)$

ここで $B_i = i$ なる i があれば明らかに答えは 0

そうでない場合、左の値は B にある -1 の個数を b として $(N-1)^b$

小課題 3

$(A_i \neq i$ かつ順列でない A の数$)$
$=(A_i \neq i$ なる A の数$)-(A_i \neq i$ かつ順列である A の数$)$

ここで $B_i = i$ なる i があれば明らかに答えは 0

そうでない場合、左の値は B にある -1 の個数を b として $(N-1)^b$

さらに、 $B_i = B_j$ なる $i, j\ (i \neq j)$ があった場合、
A は順列にはならないので、右の値は 0 になる

そうでない場合の右の値を求めれば良い

小課題 3

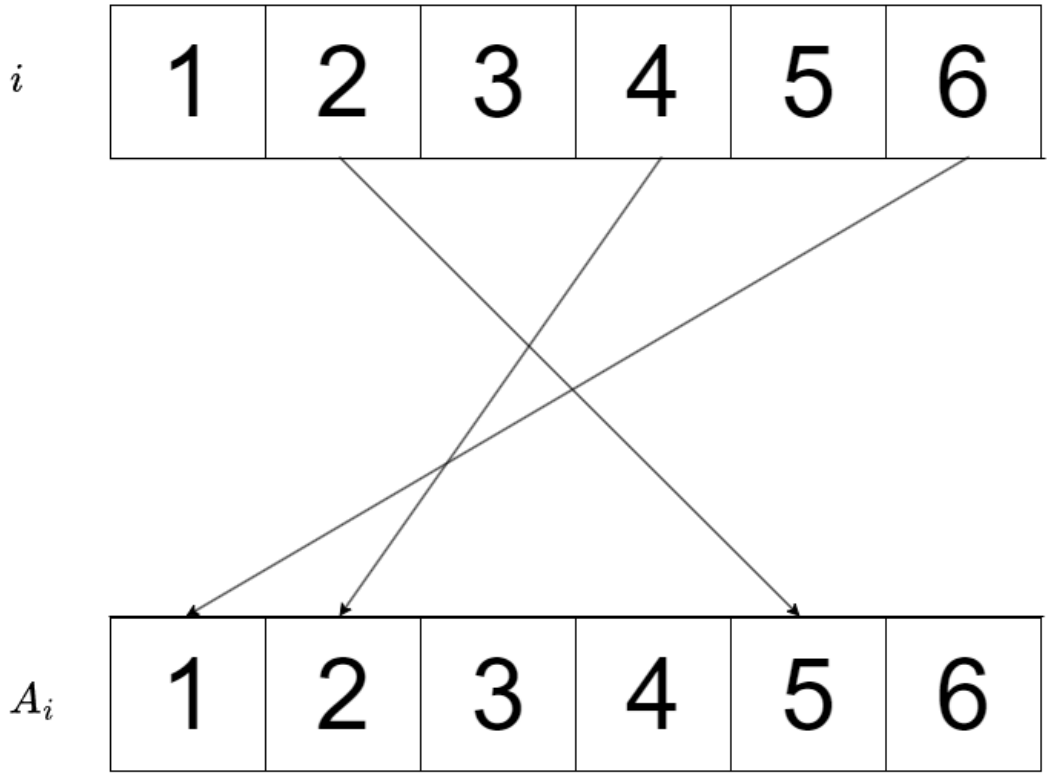
- $N \leq 2000$

求めるもの： $A_i \neq i$ かつ A が順列であるような A の個数

次の図を見てください

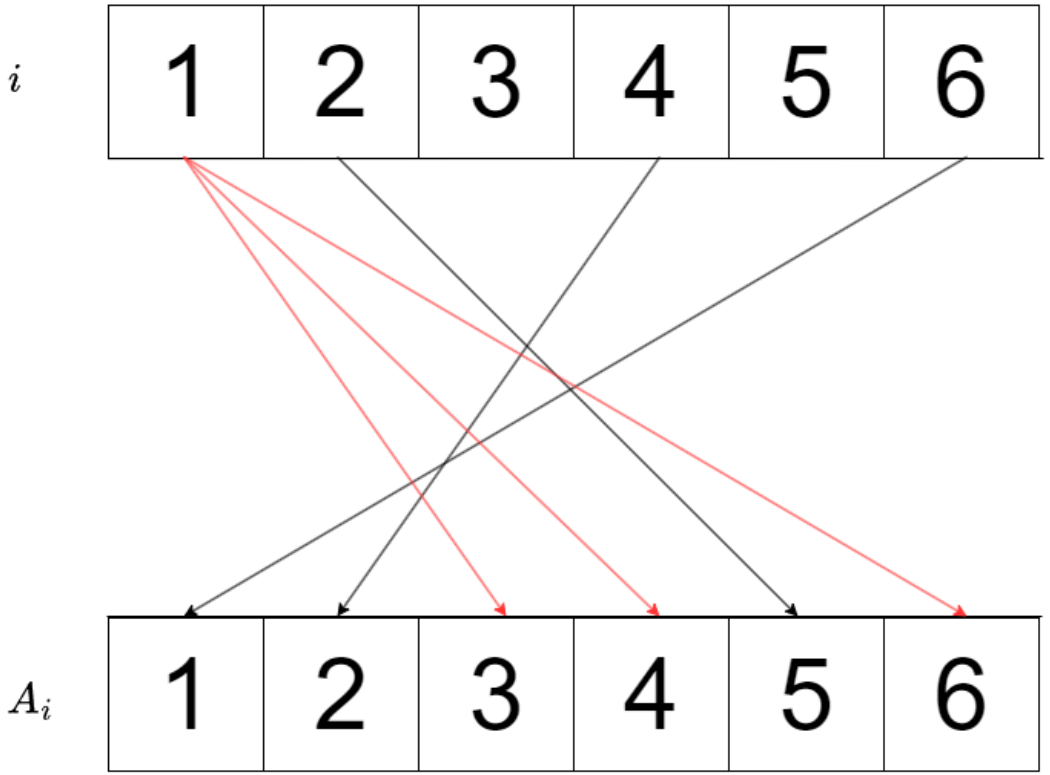
小課題 3

$B = (-1, 5, -1, 2, -1, 1)$ の場合



小課題 3

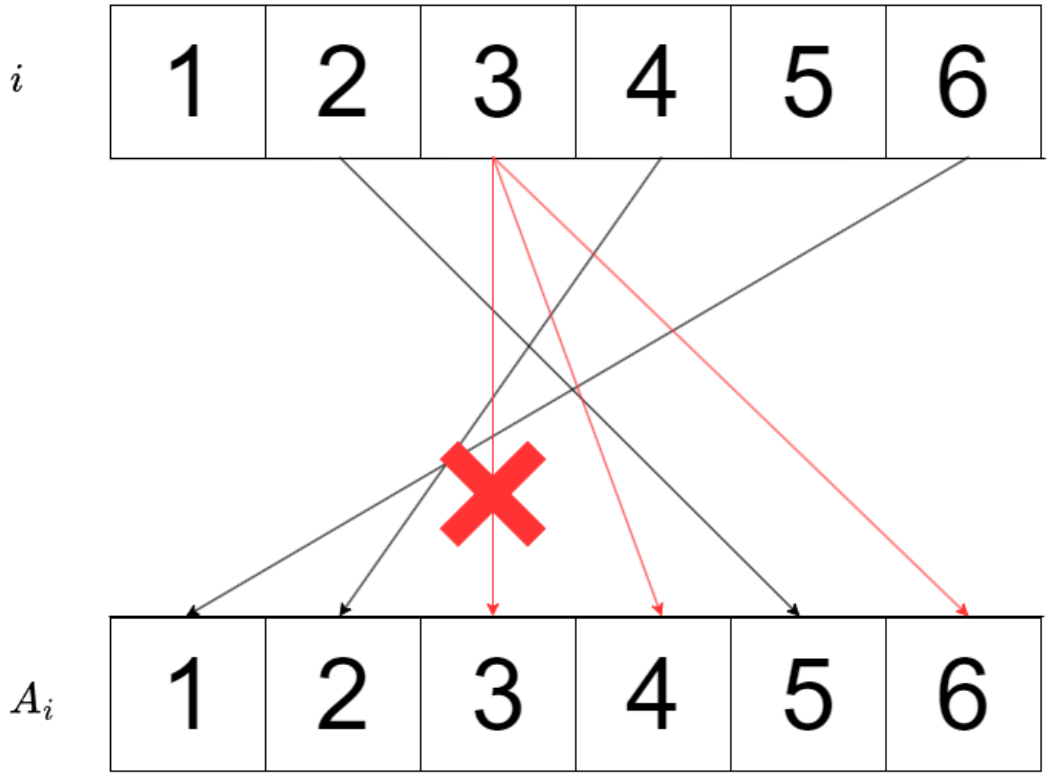
$B = (-1, 5, -1, 2, -1, 1)$ の場合



$B_1 = 3, 4, 6$

小課題 3

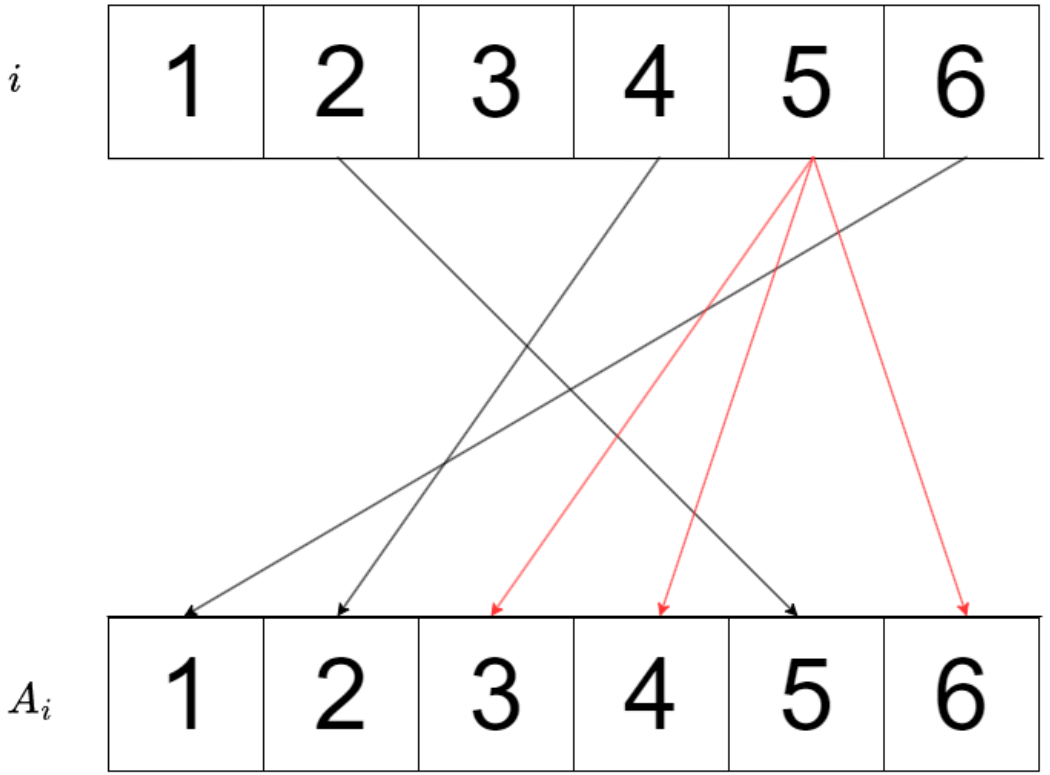
$B = (-1, 5, -1, 2, -1, 1)$ の場合



$B_3 = 4, 6$

小課題 3

$B = (-1, 5, -1, 2, -1, 1)$ の場合



$B_5 = 3, 4, 6$

小課題 3

- まだ使われていない A のどれにでも入れていい
- まだ使われていない A のうち自分以外に入れていい

の 2 通りに分けられることが分かる

それぞれ何個あるかのみが重要で、これを x, y 個とする

x, y 個のときの答えを $f(x, y)$ と置いて、小さい x, y について実験してみよう

小課題 3

$x\backslash y$	0	1	2	3	4
0	1	1	2	6	24
1	0	1	4	18	96
2	1	3	14	78	504
3	2	11	64	426	3216

$f(0,y) = y!, f(x,y) = f(x-1,y+1) - f(x-1,y)$ であることが分かる

$O(N^2)$ で計算可能

小課題 4 (満点)

さらによく見ると $f(x,y) = f(x-1,y) \times (x+y-1) + f(x-2,y) \times (x-1)$

$f(0,y) = y!$ で、 $f(1,y) = f(0,y) \times y$ なので、 $f(*,y)$ のみを計算すれば良い

$O(N)$ で計算可能

小課題 4 (満点)

証明をするうえで、問題を言い換える

次の条件を満たす長さ $x + y$ の順列 P の個数を求めよ

- $1 \leq i \leq x$ について、 $P_i \neq i$

この問題を代わりに解くことにする

この証明は攪乱順列の求め方の証明を基にしているので、
それを調べながら読むと分かりやすいかも

小課題 4 (満点)

$x = 0$ の場合 $f(x, y) = y!$ なのは明らか

$x \geq 1$ のときについて考える

$i = P_1$ と置いたとき、次の 3 通りで場合分けをする

- $2 \leq i \leq x$ かつ $P_i = 1$
- $2 \leq i \leq x$ かつ $1 < P_i$
- $x + 1 \leq i \leq x + y$

小課題 4 (満点)

- $2 \leq i \leq x$ かつ $P_i = 1$

P_1 と P_i の値を決めると、残りを決める方法は $f(x-2, y)$ 通りある

P_1 の値は $x-1$ 通りあり、 $P_i = 1$ の 1 通りの定まるので、
$f(x-2, y) \times (x-1)$ が加算される

小課題 4 (満点)

- $2 \leq i \leq x$ かつ $1 < P_i$

P_i の値はこの時点では決めない

P のうち index が 2 以上の部分を抜き取ると、$P_2, P_3, \ldots, P_{x+y}$ の値を $1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, x+y$ の中から選ぶ問題になる

$2 \leq j \leq x, j \neq i$ なる P_j について $P_j \neq j$ であり、かつ $P_i \neq 1$

選ぶ値のうち 1 を i に置き換えると、これは x を 1 個減らした問題

実質的に x を一個減らした問題と同値で、$f(x-1, y)$ 通り
P_1 の選び方はやはり $x-1$ 通りなので、$f(x-1, y) \times (x-1)$

小課題 4 (満点)

- $x+1 \leq i \leq x+y$

同様に、$P_2, P_3, \ldots, P_{x+y}$ の値を $1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, x+y$ から選ぶ

$2 \leq j \leq x$ について $P_j \neq j$ であれば良い

これも x を 1 個減らした問題と同値で、$f(x-1, y)$ 通り
P_1 は y 通り選べるので、$f(x-1, y) \times y$

小課題 4 (満点)

以上で全てをもれ・だぶりなく数えられたので、
$f(x,y) = f(x-1,y) \times (x+y-1) + f(x-2,y) \times (x-1)$ が示せた

ちなみに $y = 0$ の場合はまさに攪乱順列の数(Montmort number)になっている

Tester によると包除原理でも解けるらしい

ケースが弱くて、 $B_i \neq -1, B_i = B_j$ みたいな $i \neq j$ があるケースが subtask1 にしかなかったらしい

ごめんなさい

統計情報

オンサイト FA : PCTprobability さん (94:22)

全体 FA : yuto1115 さん (68:38)