Worst Town 解説

原案 / Writer / 解説 : しおむすび

Tester : Forested

問題概要

- 頂点数しか分からないグラフがある
- 辺数は $M = 300$ 以下
- いくつかの頂点を指定すると、その中の 2 つを結んでいる辺があるか分かる
- 3200 回以下の質問でグラフの辺を全部見つけろ

問題概要

- $1 \leq N \leq 200$
- 小課題 1 : $N \leq 80$
- 小課題 2 : 各辺が結んでいる 2 頂点の偶奇は異なる
- 小課題 3 : 頂点 a, b 間に辺があり b, c 間に辺がないなら a, c 間に辺がある
- 小課題 4 : 追加制約なし

小課題 1

- $N \leq 80$

頂点の組の数は $\dfrac{N(N-1)}{2} \leq 3160$

よって頂点の組全てについて 2 頂点のみ指定してその間に辺があるか調べる

やさしい小課題

小課題 2

- 各辺が結んでいる 2 頂点の偶奇は異なる

ここで重要なのは、**偶数の番号の頂点を全て指定しても、それらの間に辺はないこと**

例えば頂点 1 と偶数の番号の頂点全てを指定して辺があったとしたら、
偶数の頂点のうちどれかと頂点 1 の間に辺があることが分かる

小課題 2

- 各辺が結んでいる 2 頂点の偶奇は異なる

ここで重要なのは、**偶数の番号の頂点を全て指定しても、それらの間に辺はないこと**

例えば頂点 1 と偶数の番号の頂点全てを指定して辺があったとしたら、偶数の頂点のうちどれかと頂点 1 の間に辺があることが分かる

二分探索ができる

小課題 2

- 各辺が結んでいる 2 頂点の偶奇は異なる

各奇数の i について、頂点 i を端点とする辺を求める

次の条件を満たす最大の x を二分探索で求める

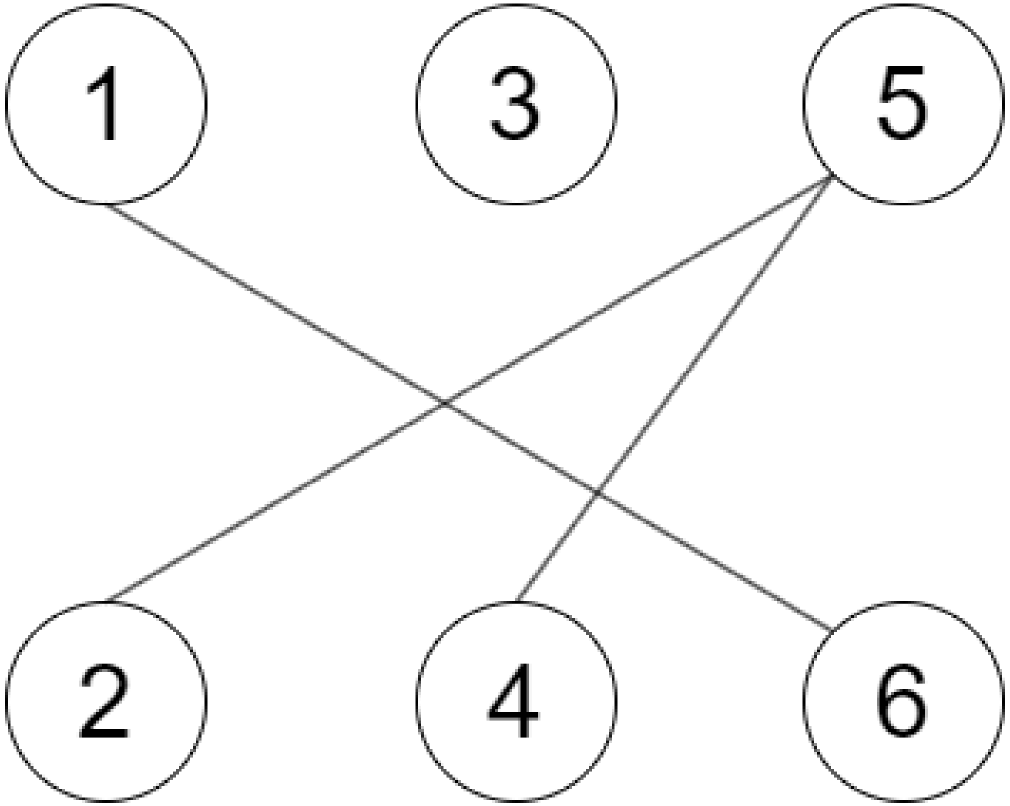
- 偶数の頂点のうち x 未満のものと頂点 i を指定したとき辺がない

このとき、 i と x の間には辺がある

次ページから実演

小課題 2

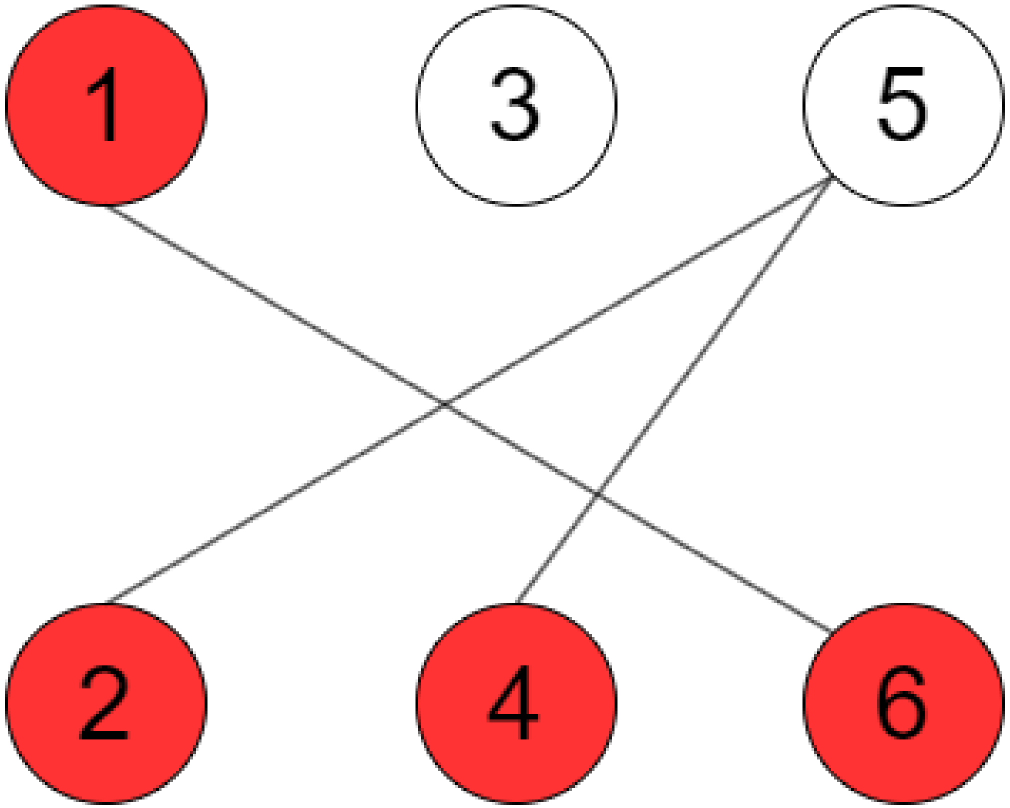
例えば次のグラフを考える



このグラフの辺を特定することを考える

小課題 2

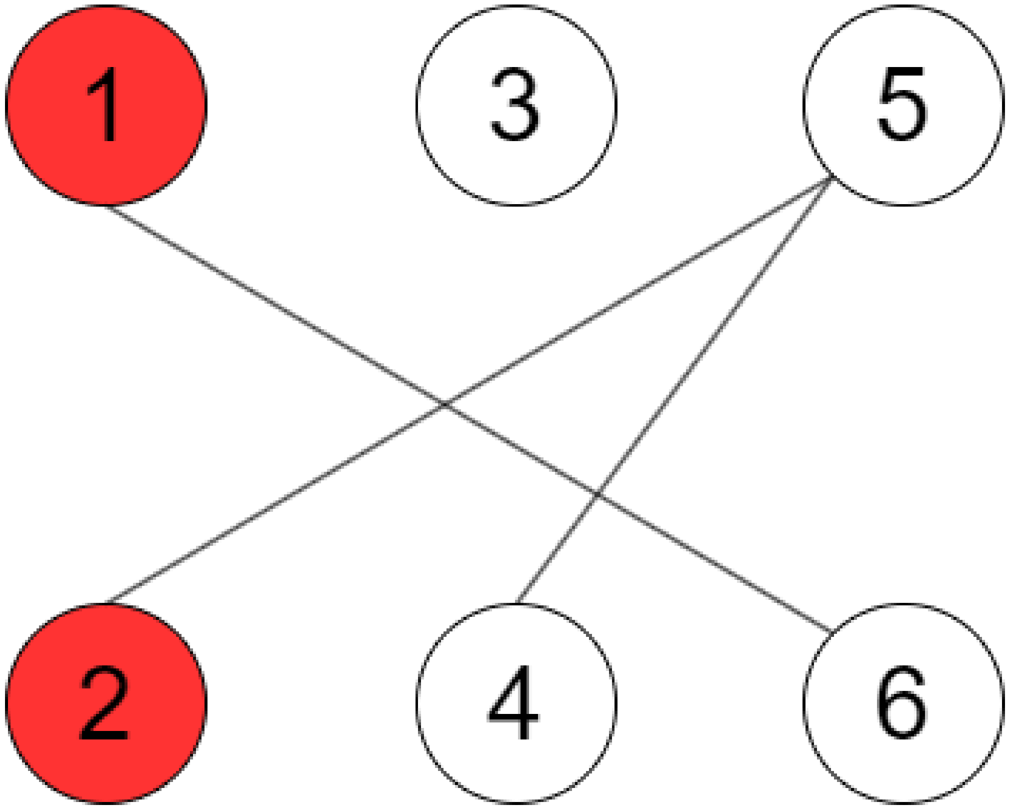
1 クエリ目 : 1 + 全ての偶数頂点



辺があるので二分探索を始める

小課題 2

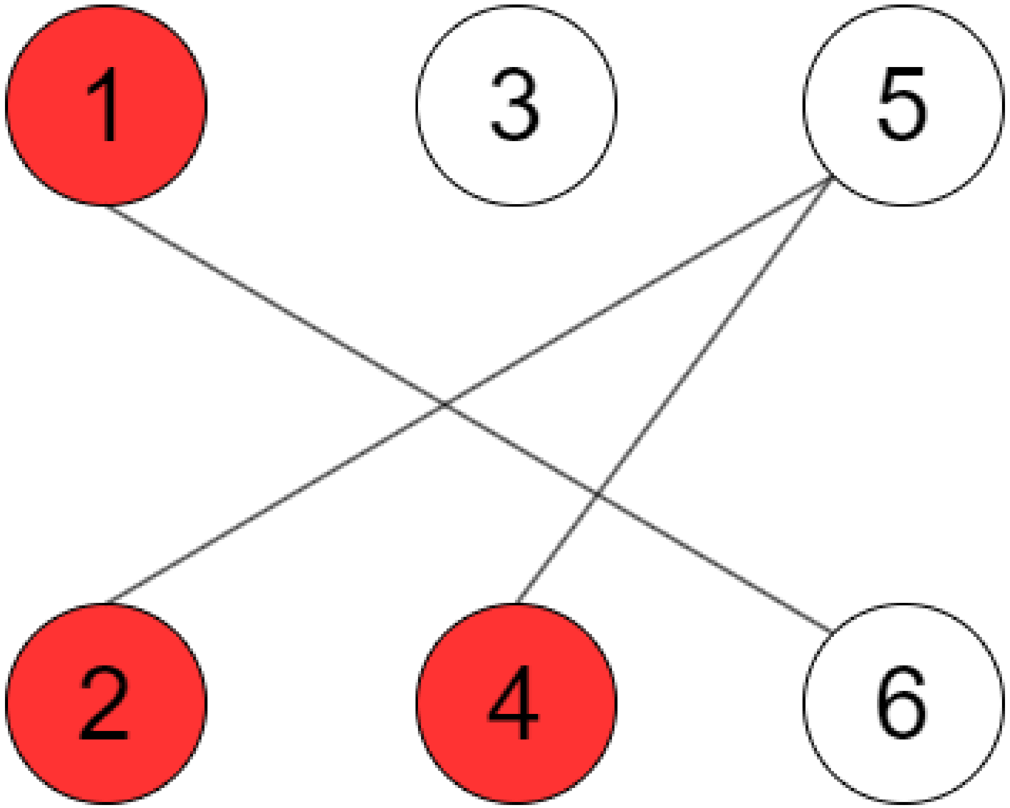
2 クエリ目 : $1 + 2$



辺がないのでさらに追加する

小課題 2

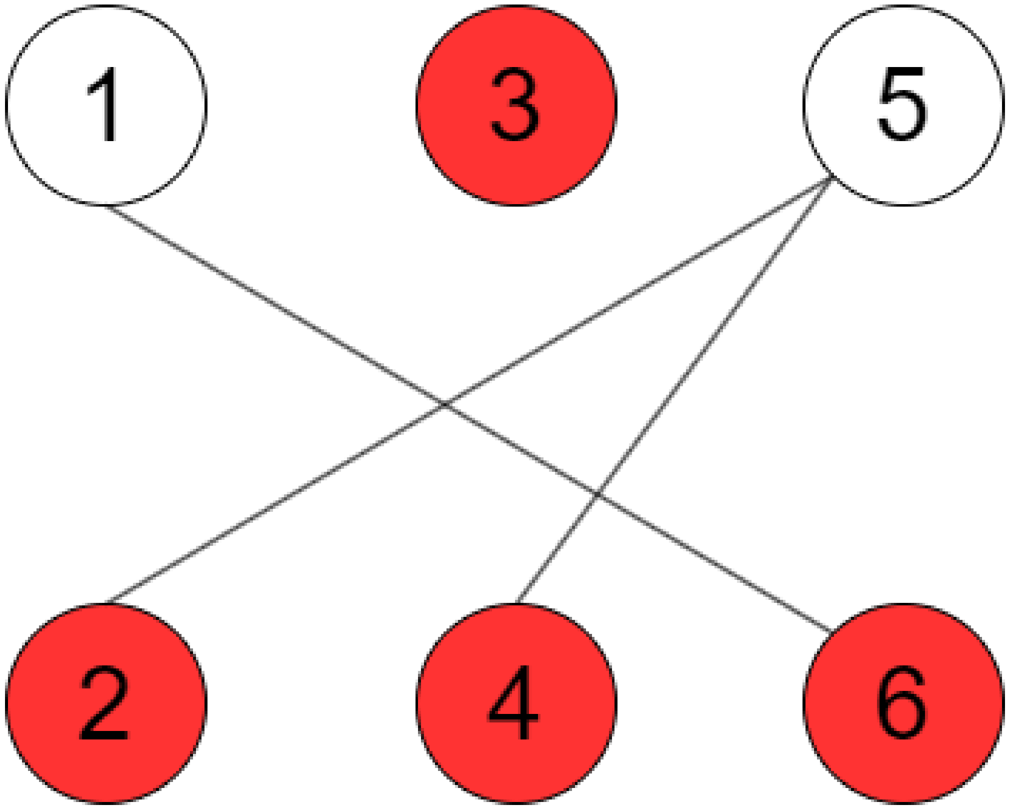
3 クエリ目 : $1 + 2, 4$



辺がなく、 6 を追加すると辺があるので $1 - 6$ に辺があると分かる

小課題 2

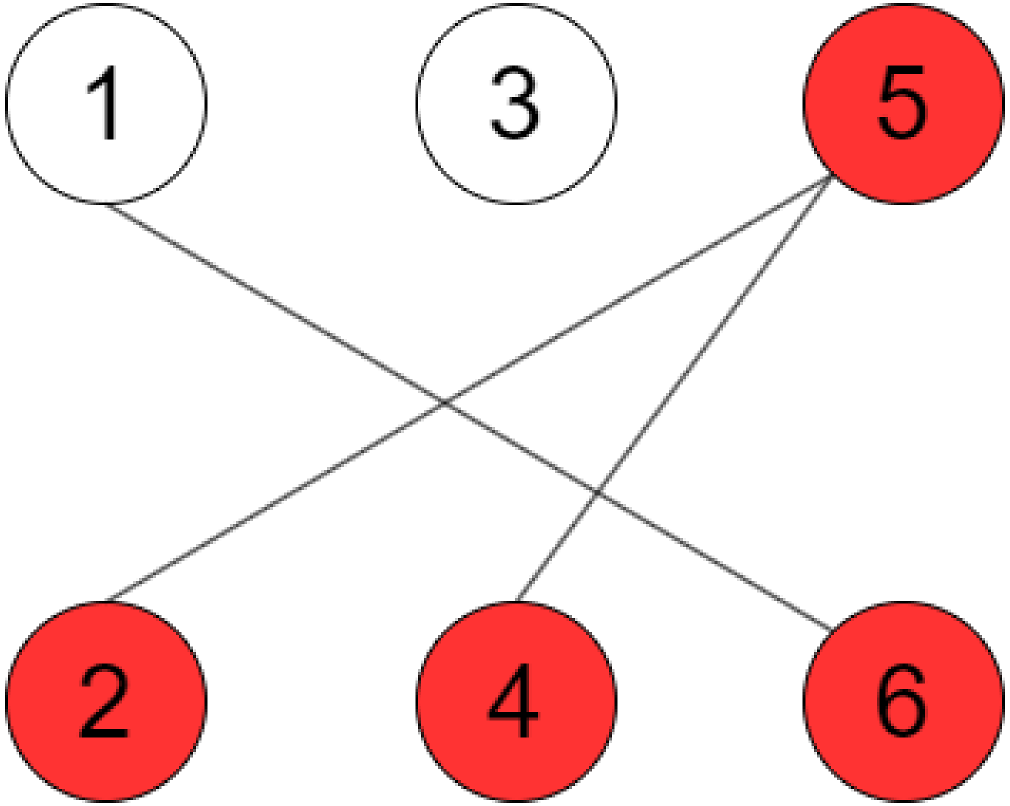
4 クエリ目 : 3 + 全ての偶数頂点



辺がないので 3 を飛ばす

小課題 2

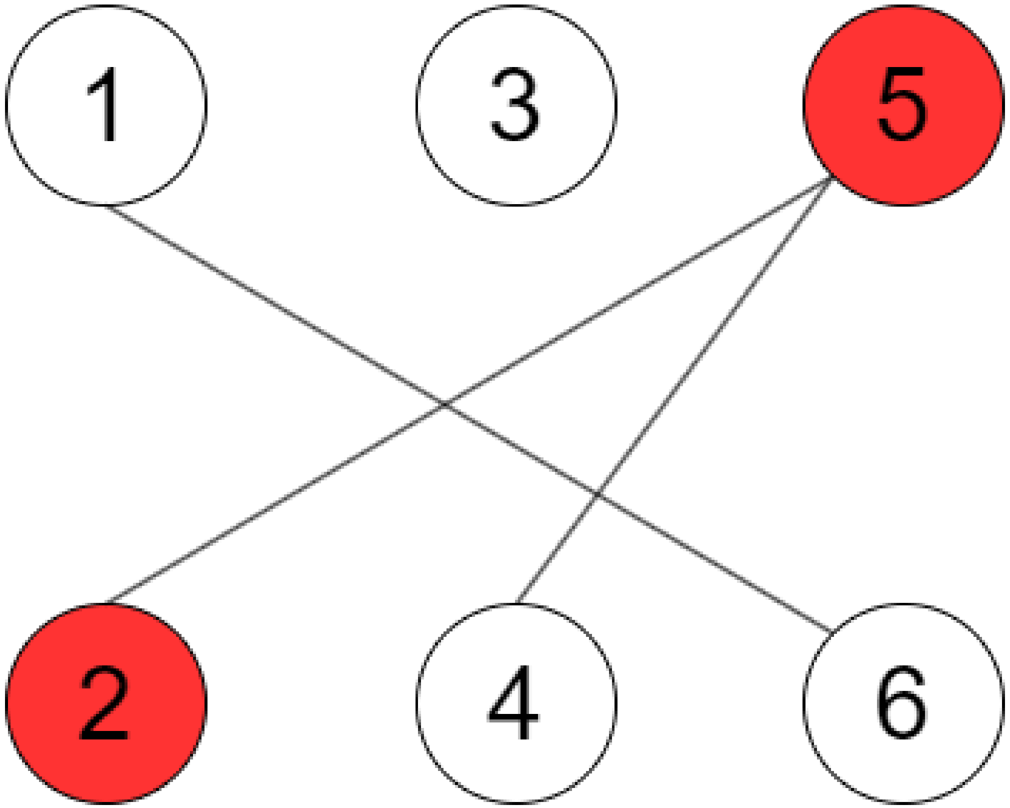
5 クエリ目：5 + 全ての偶数頂点



辺があるので二分探索を始める

小課題 2

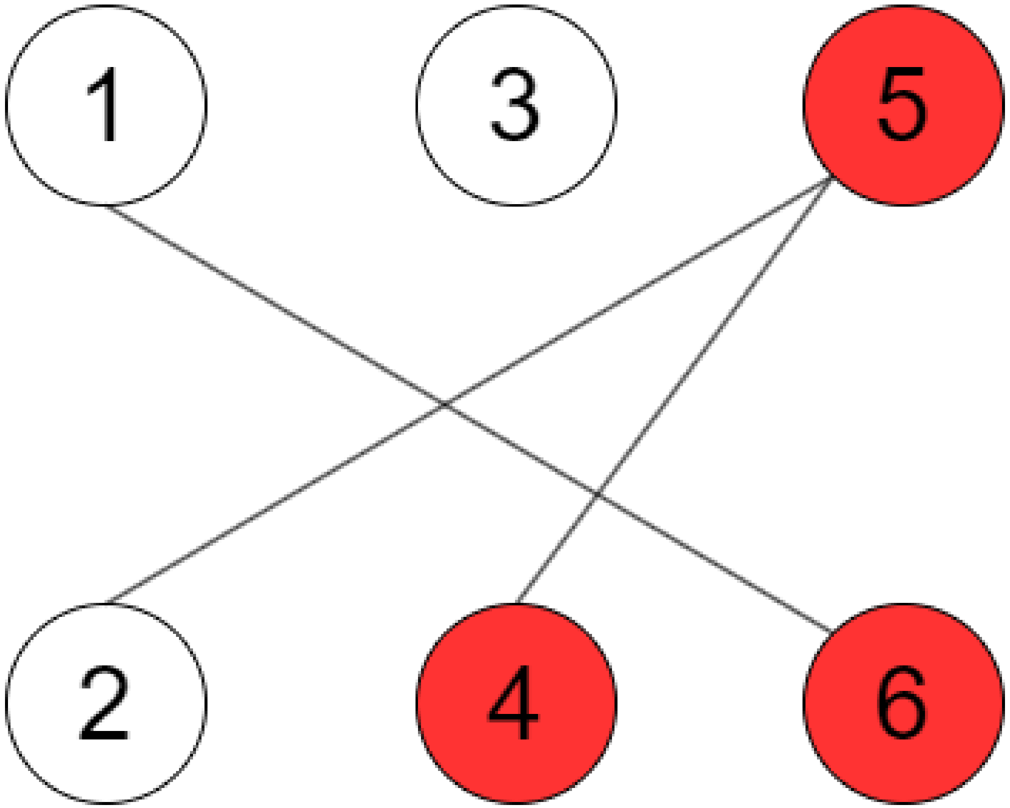
6 クエリ目 : $5 + 2$



辺があるので、 $5 - 2$ に辺があると分かる

小課題 2

7 クエリ目 : $5 + 4, 6$



2 より後に辺があるか調べると、あるのでまた二分探索をする

小課題 2

以降省略

小課題 2

よって、次のような手順で解ける

1. $i = 1, 3, 5, \ldots$ について以下を行う
2. 偶数の頂点全てと i の間に辺がない場合、次の i に行く
3. 二分探索で i を端点とする辺を求め、 $i - x$ の辺を見つける
4. $x + 2$ 以上の頂点について 2. に戻ってもう一度辺を求める

1->2 の順で実行されるのは $\frac{N}{2}$ 回、さらにその先の 3->4->2 が実行されるのは M 回

$\frac{N}{2} + M(1 + \log \frac{N}{2}) = \frac{N}{2} + M \log N$ に収まる

小課題 3

- a, b を結ぶ辺があり b, c を結ぶ辺がない場合 a, c を結ぶ辺がある

めちゃくちゃ扱いずらそうな条件なので、うまく言い換えることを考える

小課題 3

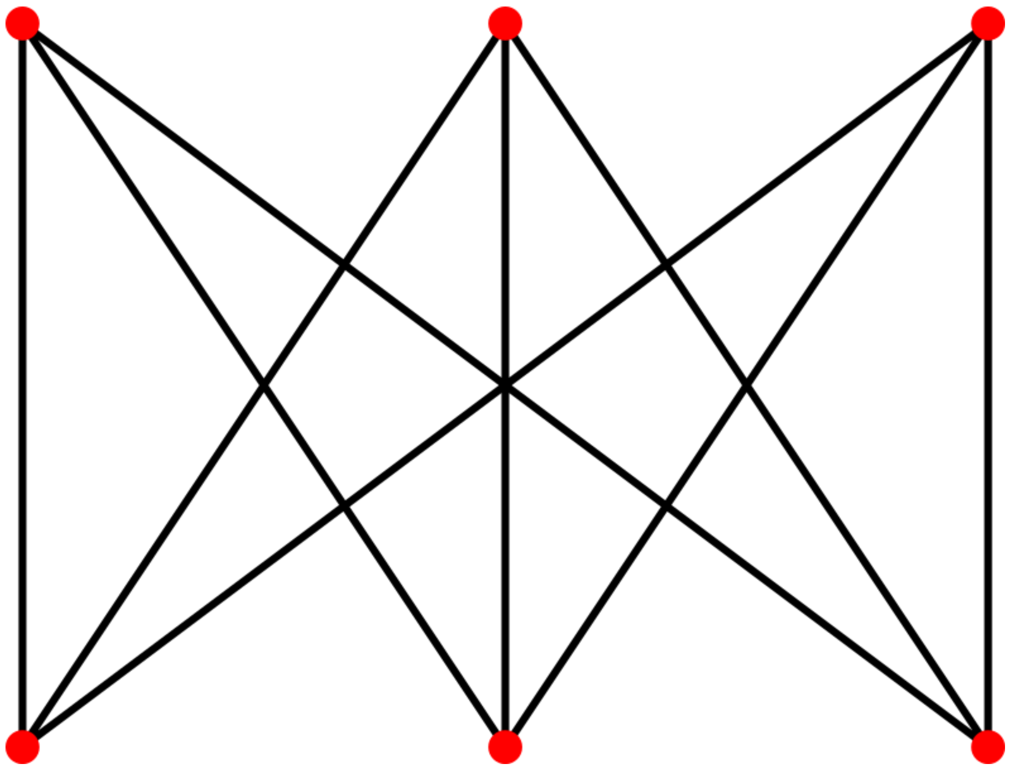
- a, b を結ぶ辺があり b, c を結ぶ辺がない場合 a, c を結ぶ辺がある

めちゃくちゃ扱いずらそうな条件なので、うまく言い換えることを考える

これは**完全K部グラフ**を表している

小課題 3

完全 2 部グラフの例



小課題 3

完全K部グラフとは？

次の条件を満たすように頂点を K 個の独立集合に分けることができるグラフ

- 同じ頂点集合の頂点間には辺がない
- 異なる頂点集合の頂点間には辺がある

なんでこうなるかは読者への課題とします

小課題 3

よって、そのような独立集合に分けることができれば異なる独立集合間の頂点に辺を張ればいい

どうやってそういう独立集合に分ければいいのか？

小課題 3

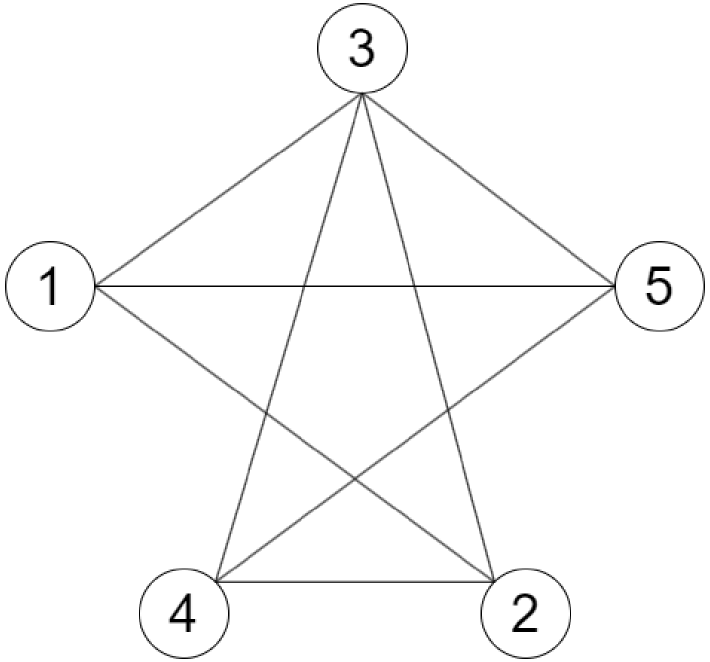
やり方：

1. 集合の列を作る(最初は集合は一個もない)
2. $i = 1, 2, \ldots, N$ について、次のことを行う
3. 集合の列を左から順に見ていって、今見ている集合に入れたとき
    - 辺がないならその集合に入れる
    - 辺があるなら一個右の集合に対して同じことをする

また実演する

小課題 3

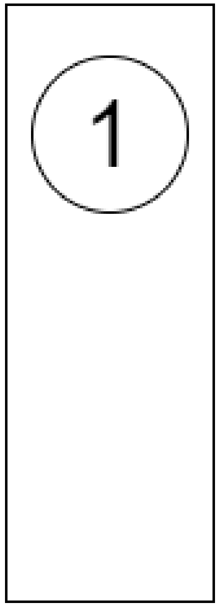
こういうグラフについて考える



このとき、$\{1,4\},\{2,5\},\{3\}$ の 3 つの独立集合に分けられる

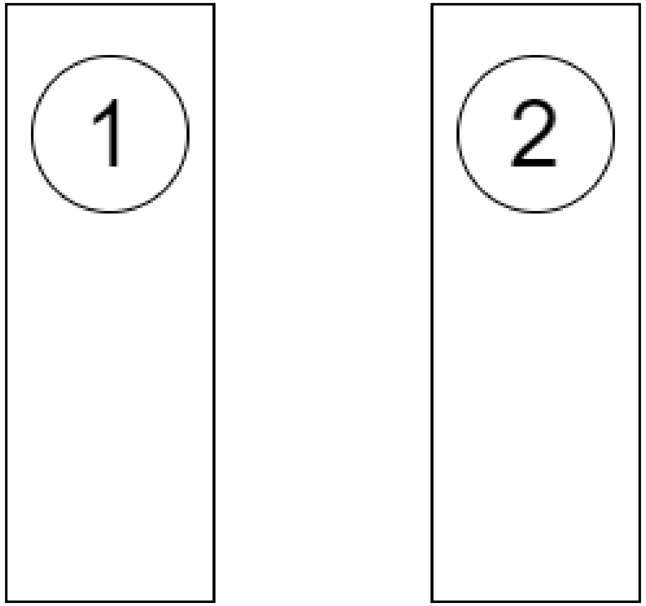
これを特定することを目指す

小課題 3



まずは 1 の入った集合を一つ作る

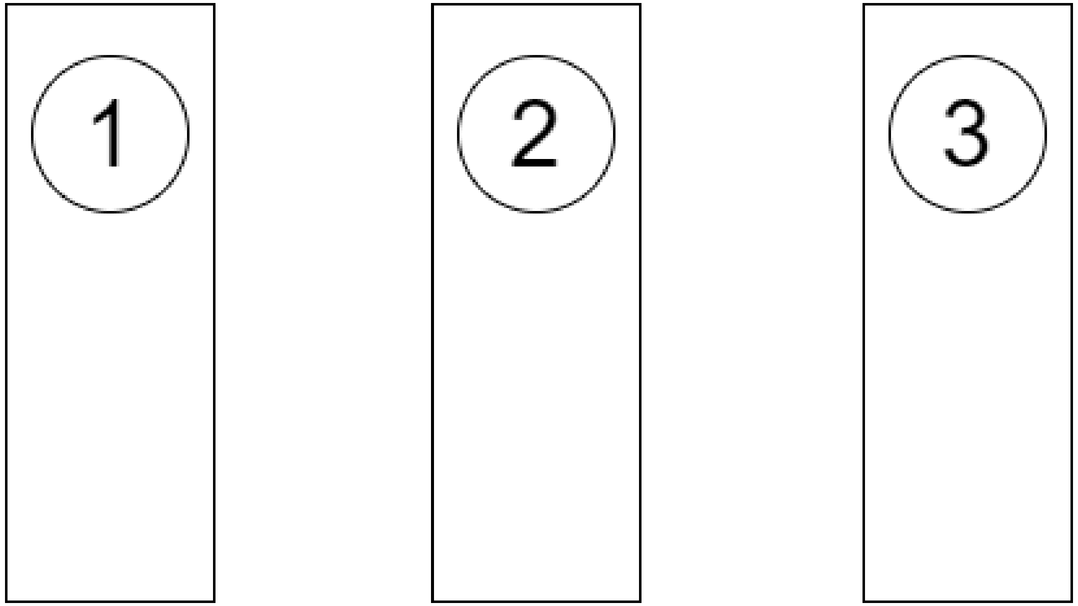
小課題 3



$1 - 2$ 間に辺があるので、1 と 2 は違う独立集合

2 の入った集合を作る

小課題 3

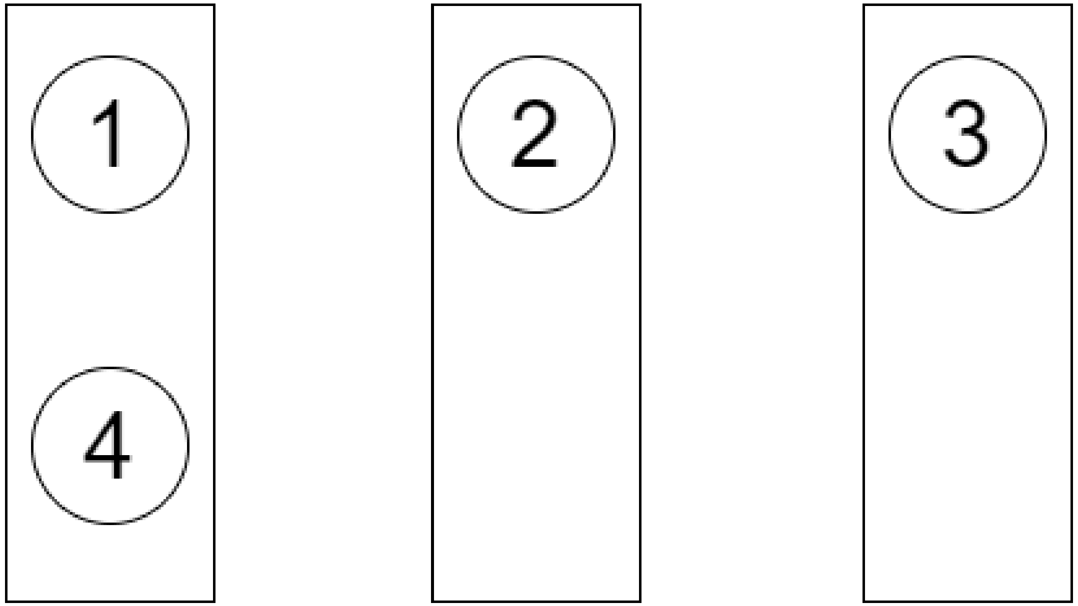


$1 - 3$ 間に辺があるので、1 と 3 は違う独立集合

$2 - 3$ 間に辺があるので、2 と 3 は違う独立集合

3 の入った集合を作る

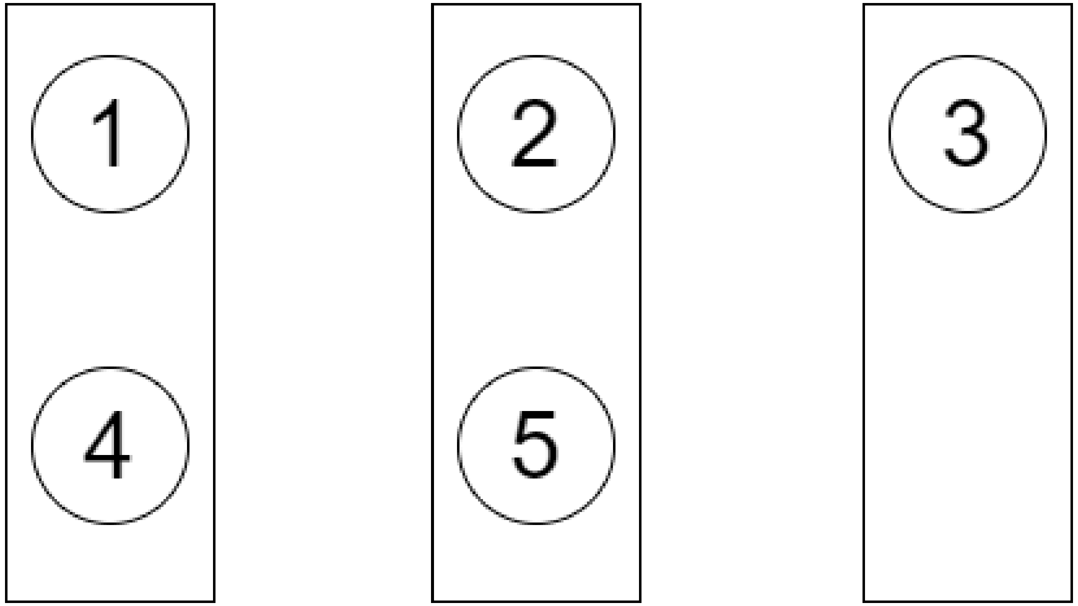
小課題 3



1 – 4 間に辺がないので、1 は 4 と同じ独立集合

4 を 1 の入った集合に入れる

小課題 3



1 − 5 間に辺があるので、1 と 5 は違う独立集合

2 − 5 間に辺がないので、2 は 5 と同じ独立集合

5 を 2 の入った集合に入れる

小課題 3

1. 集合の列を作る(最初は集合は一個もない)
2. $i = 1, 2, \ldots, N$ について、次のことを行う
3. 集合の列を左から順に見ていって、今見ている集合に入れたとき
   - 辺がないならその集合に入れる
   - 辺があるなら一個右の集合に対して同じことをする

「辺があるなら右に行く」というのは明らかに M 回しか起きないので、$N + M$ 回のクエリで答えを求められる

満点解法に行く前に

小課題 $1, 2, 3$ の制約を満たすかを最初の時点で判定できないと AtCoder の仕様上、$50 + 100 + 150$ 点を得ることはできない

以下のようにやると良い

- $N \leq 80$ の場合、小課題 1 の解法で解く
- 奇数の頂点全部 / 偶数の頂点全部 の 2 回の質問を行い、どちらにも辺がないなら小課題 2 の解法で解く
- そうでない場合小課題 3 の解法で解く

300 点を得られる

小課題 4

- 追加制約なし

小課題 $2, 3$ の解法を組み合わせれば解ける

小課題 4

1. まず小課題 3 のやり方で独立集合に分ける
2. 次に各頂点について、それより左にある各独立集合に対して小課題 2 のやり方で辺を求める

1 については小課題 3 と同様に $N+M$ 回でできる

2 について、今見ている頂点より左にある独立集合とは必ず辺があるので、
最初の 1 回の辺があるかの確認を省略できる
よって小課題 2 の $\frac{N}{2}$ の部分が削れて $M(1+\log N)$ 回

合計は $N+M(2+\log N)$ で、これは $N=200, M=300$ で 3200 回を下回る