

みんなのプロコン 2018 決勝

問題 A: “Uncommon” 解説

2018.02.24

問題概要

- 長さ N の整数列 a と、整数 M が与えられる
- 例: $N = 4, a = [6, 7, 8, 9], M = 3$
- a の要素のうち、1 と互いに素なものは何個か？
2 と互いに素なものは何個か？
… M と互いに素なものは何個か？
- 例: $[6, 7, 8, 9]$ のうち、1 と互いに素なものは 4 個全部、
2 と互いに素なものは 7, 9 の 2 個、3 と互いに素なものは 7, 8 の 2 個
- 制約: (すべての入力値) $\leq 100\ 000$

指針

- a の要素を毎回全部チェックする暇はない
- 例: 12 と互いに素な要素の個数を効率的に求めるには…
- 「 $12 = 2 \times 2 \times 3$ と互いに素」とは、
「2 で割り切れない」かつ「3 で割り切れない」
- よって、(12 と互いに素な要素の個数)
= (全体) - (2 で割り切れる要素の個数)
- (3 で割り切れる要素の個数) + (6 で割り切れる要素の個数)
- より複雑なケースも包除原理で同様に

解法

- 事前に、 $1 \sim M$ のすべての整数 i に対し、 a の要素のうち i の倍数であるものの個数を求めておく
- ループ回数 $N/1 + N/2 + \dots + N/M$: $O(N \log N)$ 時間
- $1 \sim M$ のすべての整数 i に対し、 i を素因数分解する。
包除原理より、求めたい個数は事前計算で求めた値を
足し引きすることで計算できる（事前計算には無駄があるが問題ない）
- $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 = 510510 > 100000$ より、
異なる素因数の個数は最大で 6 個。
分岐は最大で 2 の 6 乗 = 64 通り。スクリプト言語でも間に合う

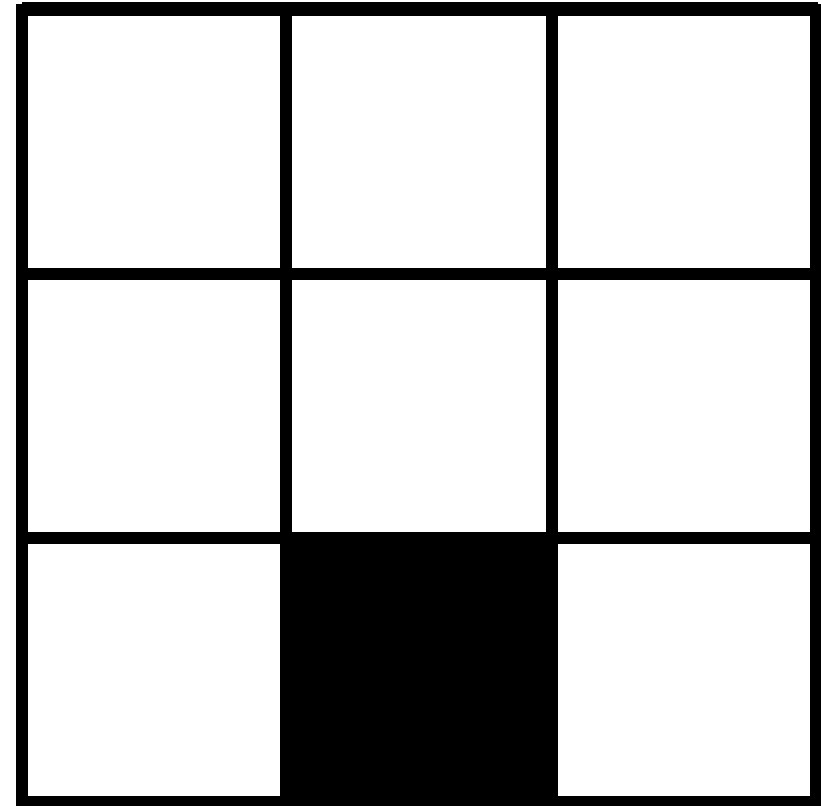
B 問題 経路が色々

問題概要

- 100×100 以下のサイズのグリッドの各マスを白か黒で塗り、左上から右下まで最短距離で行く場合の数をちょうど K 通りにせよ
- $K \leq 10^{18}$

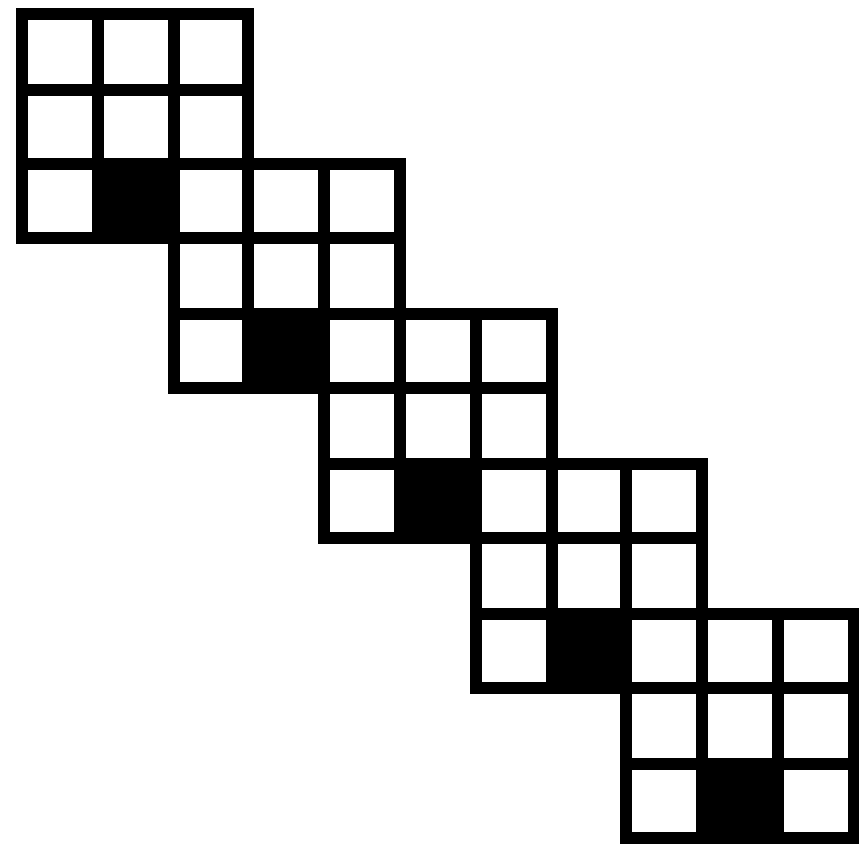
解法

- この図形の左上から右下までの経路は 3 通り



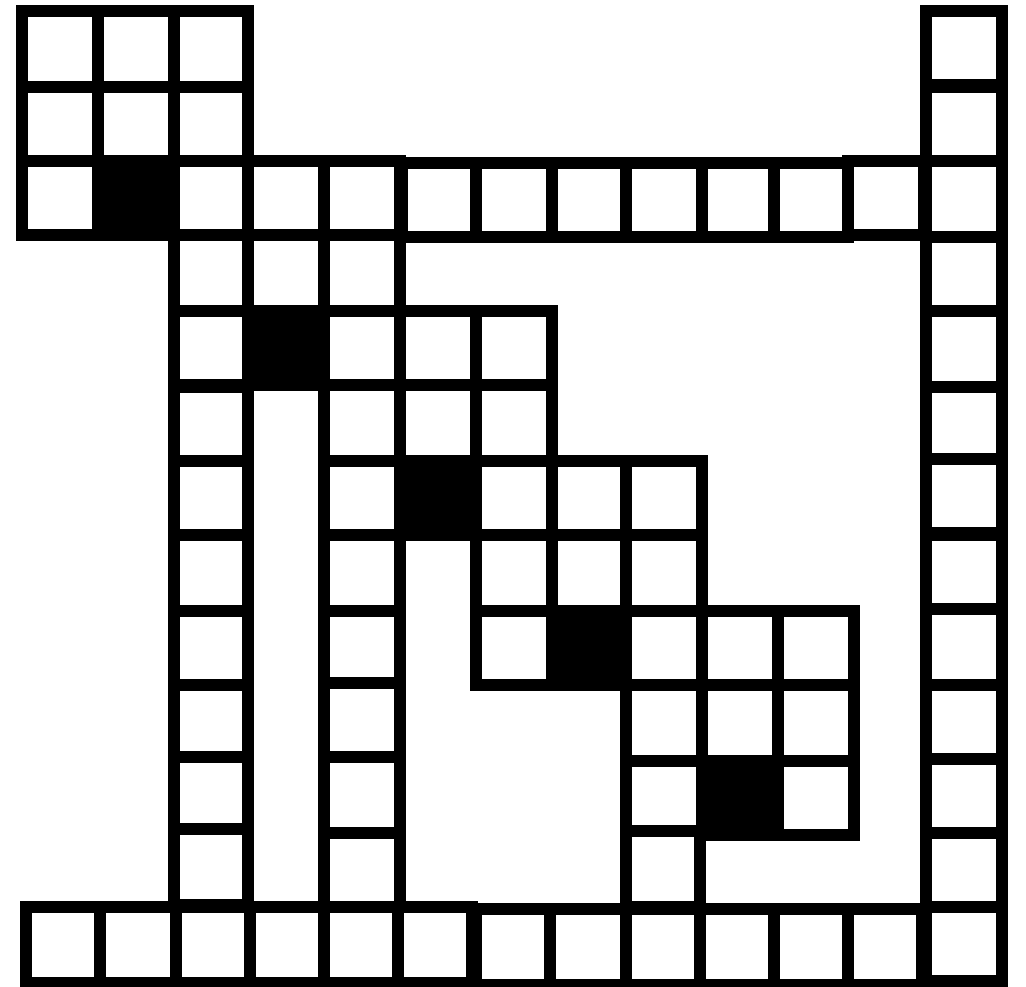
解法

- こんな感じにつなげる



解法

- こんな感じに生やす
- K の 3 進表記の下から i 桁目が 0,1,2 のとき、 i 個目のブロックからそれぞれ 0,1,2 本生やす
- $3^{40} > 10^{18}$ なので、 80×80 くらいで足りる
- 解けた



C 問題 木の問題

問題概要

- N 頂点の木が与えられる
- 次のクエリ Q 個に答えよ
- 頂点 v から距離ちょうど d の点はいくつあるか？
- $N, Q \leq 10^5$

解法

- 重心分解を考える
- 木上のパスは、重心を通るか通らないかのどちらか
- v から距離 d の点のうち、 v から重心を通らずにいける点については再帰的に数えることにして、重心を通って行く点についてのみ考える

解法

- 重心を c とし、 v の c からの距離を $\text{dep}(v)$ とかく
- このとき、 u - v パスが c を通るような頂点 u, v 間の距離は、 $\text{dep}(u) + \text{dep}(v)$
- よってこのとき、 v からの距離が d でそのパスが c を通るようなものの個数は、 $\text{dep}(u) = d - \text{dep}(v)$ なる u の個数から、 $\text{dep}(u) = d - \text{dep}(v)$ なる (c から見て) v と同じ部分木に属する頂点 u の個数を引いたもの
- 両者とも、重心からの dfs で求められる

解法

- 以下を再帰的に繰り返せば、この問題が解ける
- 計算量は $O((N+Q)\log N)$ で、間に合う

D : LCP(prefix,suffix)

問題概要

- 以下の条件を満たす長さ N の文字列 s はあるか？
 - $s[1, i]$ と $s[N - i + 1, N]$ の最長共通接頭辞(LCP)の長さは l_i

考察

- もう少し一般的な問題に言い換える
 - $1, \dots, N$ の番号がついた N 頂点の無向グラフが与えられる
 - それぞれの頂点を N 色で塗る(文字の割り当て)
 - いくつかの制約が与えられる
 - ある頂点 u, v は同じ色で塗られる(LCPの範囲内)
 - ある頂点 u, v は同じ色で塗ってはいけない(LCPの境界)
 - 塗り分けは可能か？

考察

- ある頂点 u, v が同じ色という制約は
頂点 u, v を 1 つの集合にまとめる操作
 - Union Find でできる
- ある頂点 u, v が異なる色という制約は
頂点 u, v に辺が張られたとき隣接する
頂点は異なる色という条件
- 頂点彩色問題に帰着
 - N 色使えるので各集合に異なる色を割り当てられる
 - 自己ループがあってはいけない, という単純な制約

$O(N^2\alpha(N))$ 解法

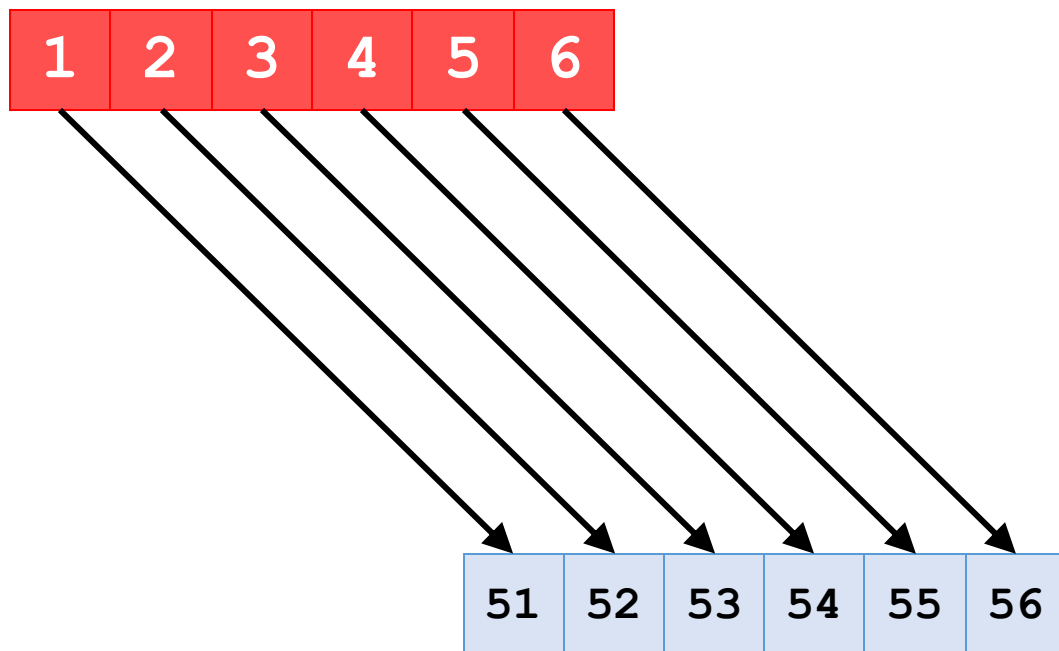
- 各 i について以下の処理を行う
 - $0 \leq j < l_i$ を満たす各 j について頂点 $1 + j$ が属する集合と頂点 $N - i + 1 + j$ が属する集合をマージ
- その後各 i について以下の処理を行う
 - 頂点 $1 + l_i$ が属する集合と頂点 $N - i + 1 + l_i$ が同じ集合に属するならば No
- 間に合わない

方針

- $0 \leq j < l_i$ を満たす各 j について頂点 $1 + j$ が属する集合と 頂点 $N - i + 1 + j$ が属する集合をマージ
- この操作を高速にしたい
- 区間に対する操作をまとめてやりたい...

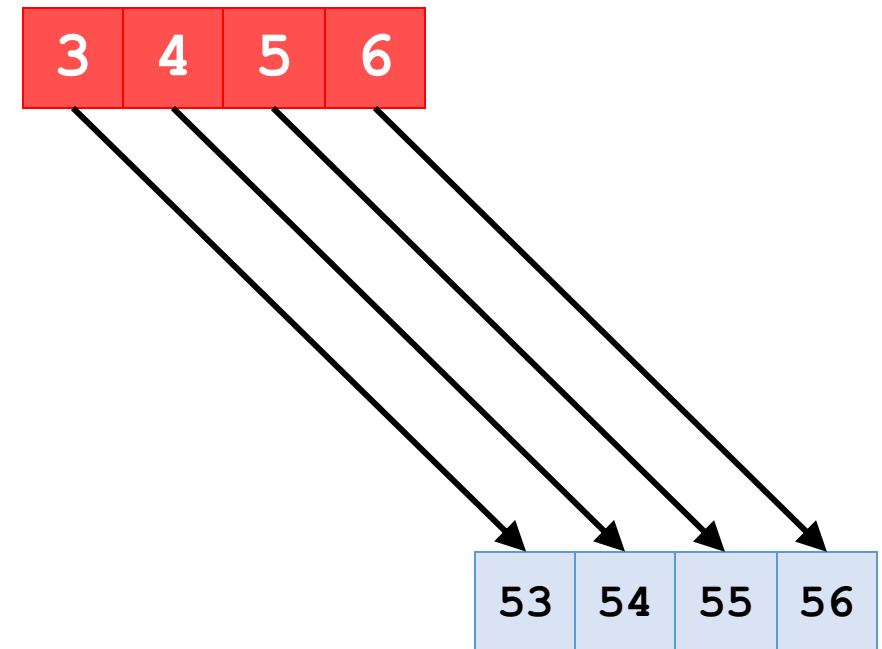
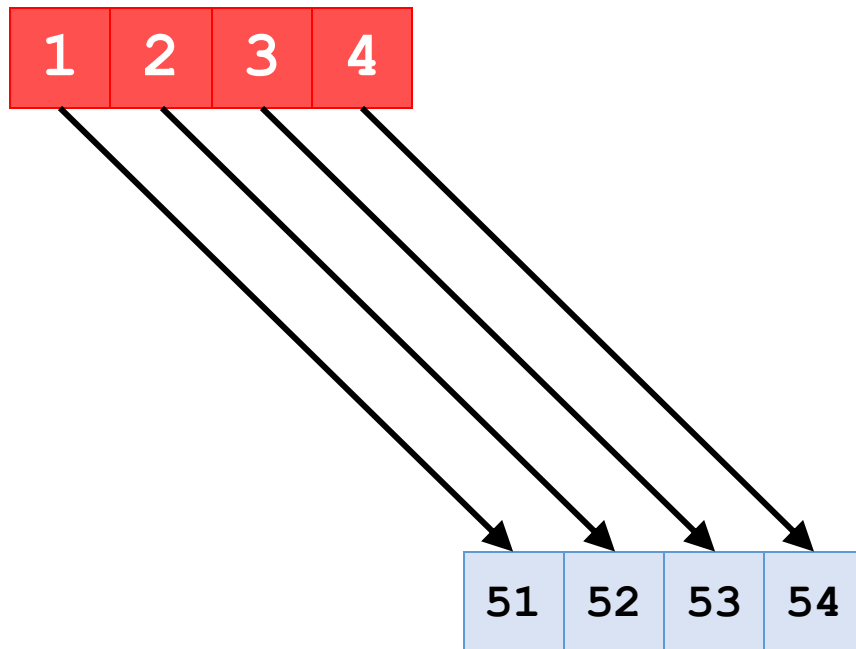
操作

- $(1, 51), (2, 52), \dots, (6, 56)$ をマージしたい



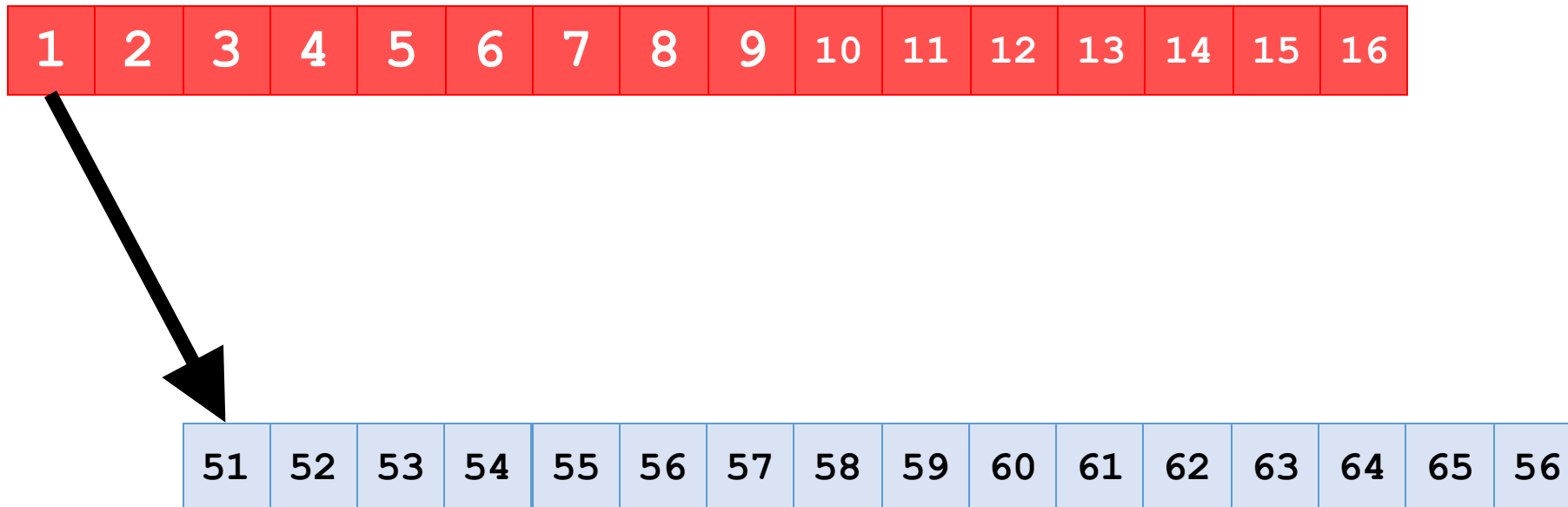
操作

- $(1, 51), (2, 52), \dots, (4, 54)$ をマージと
- $(3, 53), (4, 54), \dots, (6, 56)$ をマージに分ける
 - 長さが 2 べきになった
 - 2 べきだと嬉しいことがある？



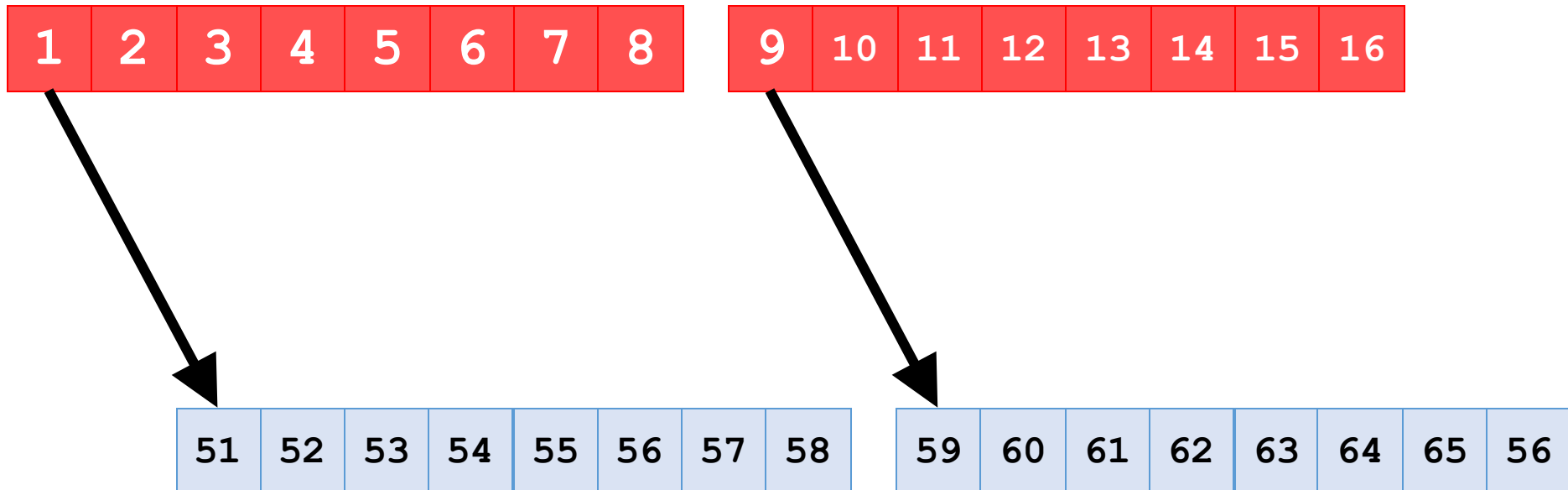
ダブリング

- Union Find 上で i と j が同じ集合に属するとき、以下を満たすとする
 - i と j が, $i+1$ と $j+1$ が, ..., $i+2^k-1$ と $j+2^k-1$ がそれぞれ同じ集合に属する
- 1 回の操作でまとめて処理できる



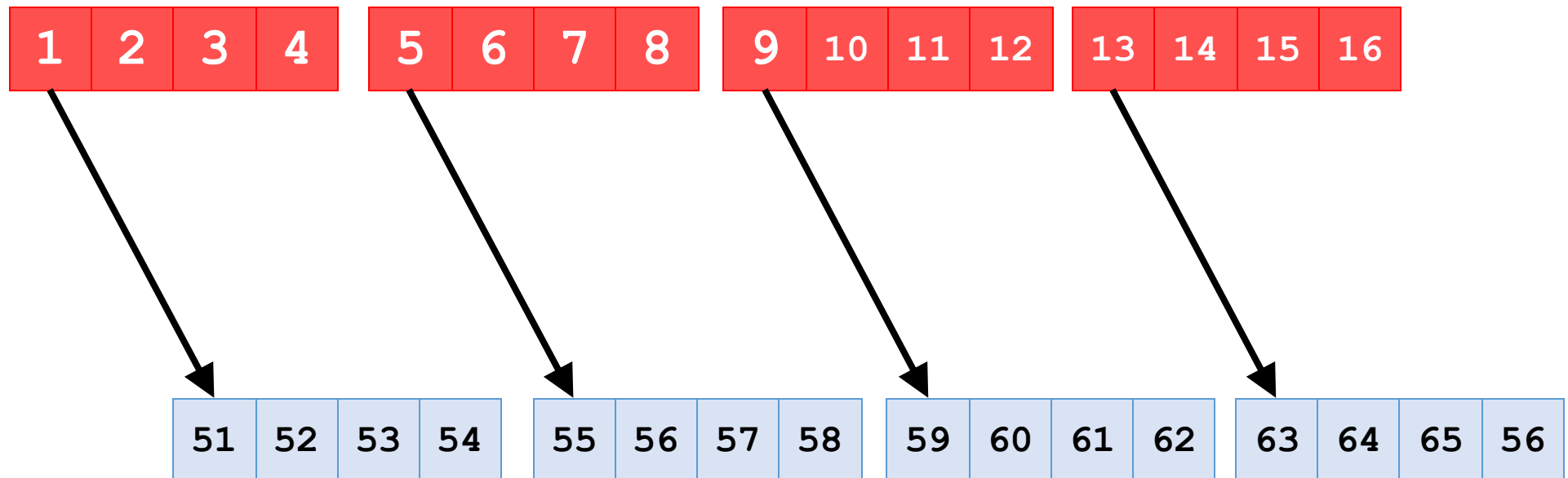
ダブリング

- Union Find 上で i と j が同じ集合に属するとき、以下を満たすとする
 - i と j が, $i+1$ と $j+1$ が, ..., $i+2^k-1$ と $j+2^k-1$ がそれぞれ同じ集合に属する
- 1 回の操作でまとめて処理できる
- 再帰的に分割しながら伝搬できる



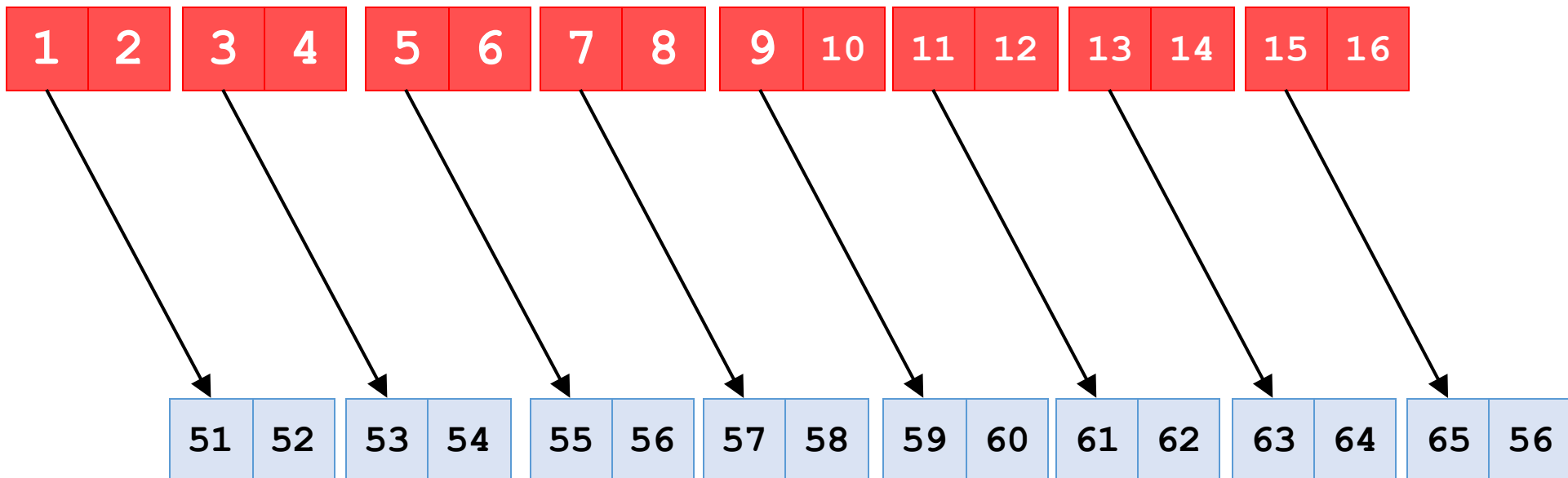
ダブリング

- Union Find 上で i と j が同じ集合に属するとき、以下を満たすとする
 - i と j が, $i+1$ と $j+1$ が, ..., $i+2^k-1$ と $j+2^k-1$ がそれぞれ同じ集合に属する
- 1 回の操作でまとめて処理できる
- 再帰的に分割しながら伝搬できる



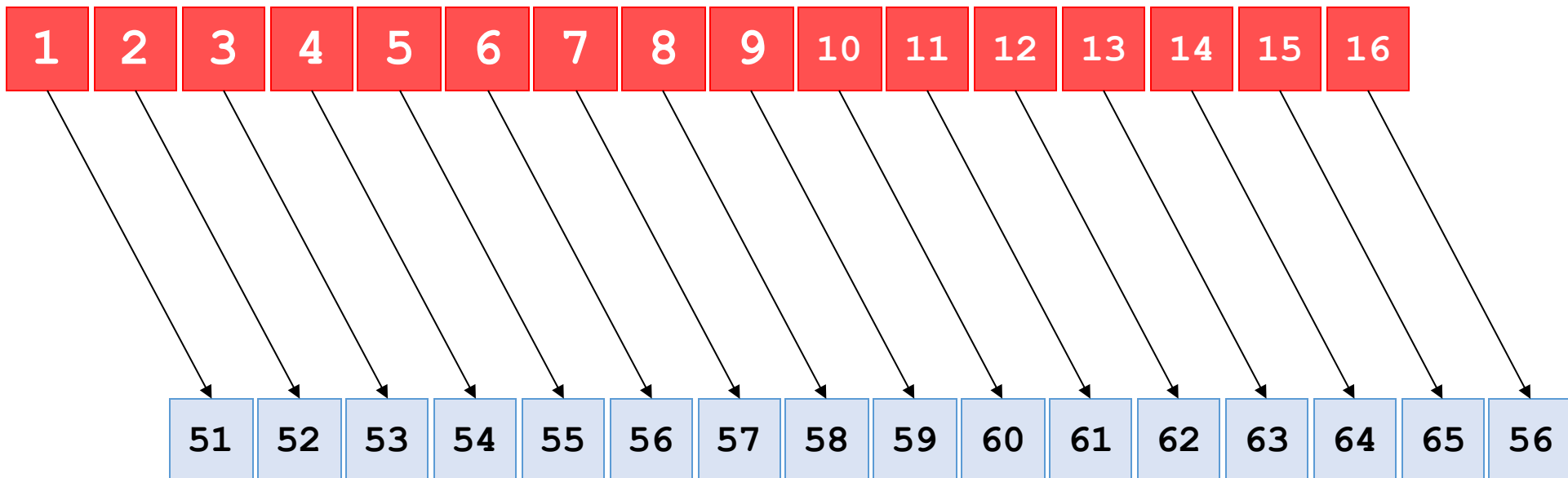
ダブリング

- Union Find 上で i と j が同じ集合に属するとき、以下を満たすとする
 - i と j が, $i+1$ と $j+1$ が, ..., $i+2^k-1$ と $j+2^k-1$ がそれぞれ同じ集合に属する
- 1 回の操作でまとめて処理できる
- 再帰的に分割しながら伝搬できる



ダブリング

- Union Find 上で i と j が同じ集合に属するとき、以下を満たすとする
 - i と j が, $i+1$ と $j+1$ が, ..., $i+2^k-1$ と $j+2^k-1$ がそれぞれ同じ集合に属する
- 1 回の操作でまとめて処理できる
- 再帰的に分割しながら伝搬できる



まとめ

- 区間を適当に 2 べきになるように分ける
- $\log N$ 個ぐらい Union Find を用意する
- 再帰的に伝搬しながら適切にマージ
- 各 Union-Find ごとに $O(N\alpha(N))$ 程度
- $O(N \log N \alpha(N))$
 - ちょっと重いが十分間に合う
 - マージテクを使った Union Find だと厳しいかも？

E：ネットワークの構築

問題概要

- 長さ M の数列 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が与えられる
 - 数列は自由に並び替えてよい
- N 頂点の辺のない有向グラフに
 M 本の辺を追加して強連結にせよ
- i 番目に追加する辺は $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i$ をつなぐ辺
 - 向きは自由を選ぶ

問題の言い換え

- 連結無向グラフの辺に向きづけしたときに
強連結にできる条件は「**橋が存在しない**」こと
- 向き付けのことは忘れて、
橋のない連結無向グラフを構築することにする

考察

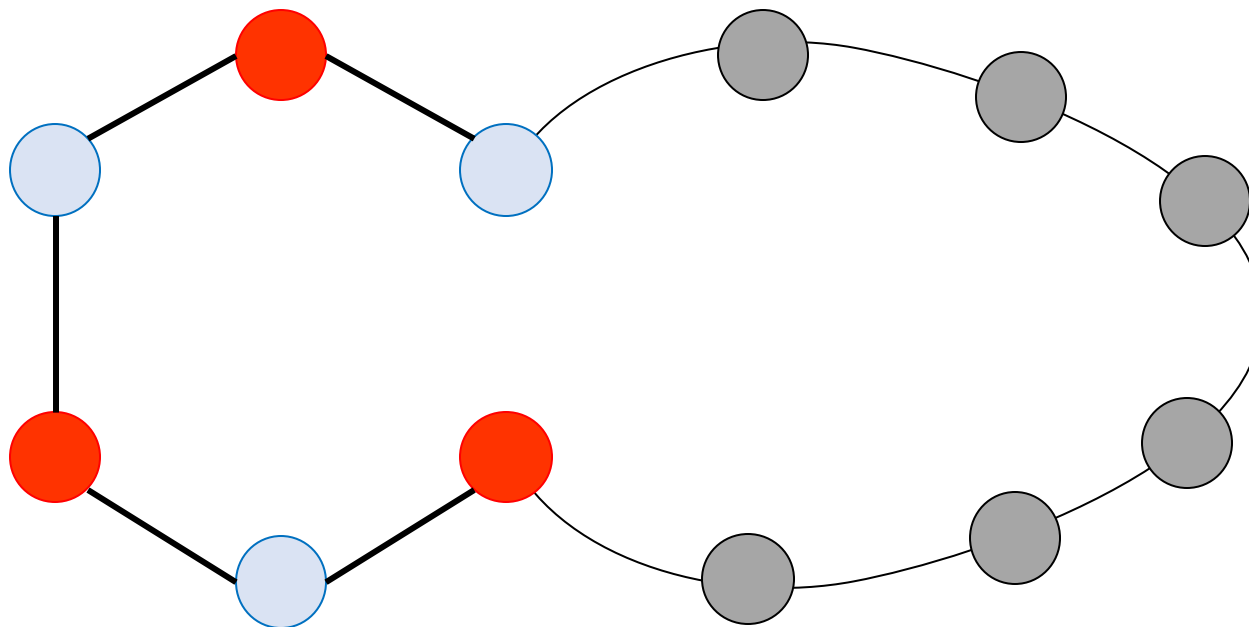
- $N = 1$ なら自明
 - それ以外の場合を考える
- a, b から各頂点の次数が分かる
- 次数が 2 未満の頂点が存在したなら No
 - どうやっても橋か孤立点ができる
- 実はそれ以外なら必ず構成できるのでは ???
 - 実際できる

考察($N = M$)

- 簡単な場合から考える
- 頂点は 3 種類に分類できる
 - a で 2 回出現 (赤)
 - b で 2 回出現 (青)
 - a, b 両方で出現 (灰)
- 赤 同士、青 同士は辺でつなぐことはできない
- 灰 は赤 と 青 の間を自由につなげる
 - 赤 – 灰 – . . . – 灰 – 青

考察($N = M$)

- **赤** グループに属する頂点の数と
青 グループに属する頂点の数は等しい
- 灰 は**赤**と**青**の間を自由につなげる
 - **赤**—灰— $\dots$ —灰—**青**
- 下の図のようなサイクルが作れる

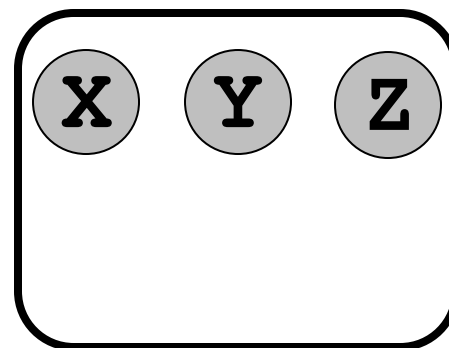
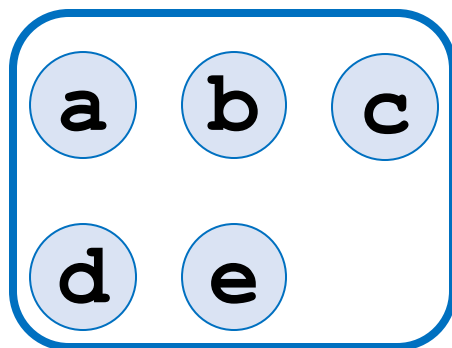
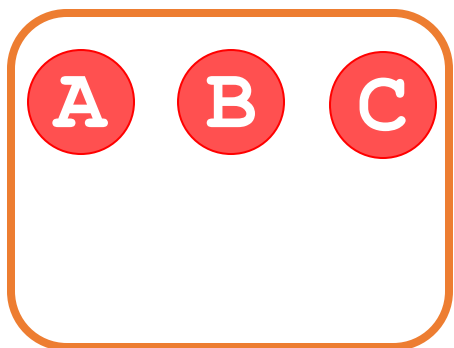


考察(一般の場合)

- $N = M$ の場合と同様の方針で考える
- 頂点を 3 種類に分類してみる
 - a でのみ(2 回以上)出現 (赤)
 - b でのみ(2 回以上)出現 (青)
 - a, b 両方で 1 回ずつ以上出現(灰)
- 赤 同士、青 同士は辺でつなぐことはできない
- 灰 は赤と青の間を自由につなげる
 - 赤－灰－．．．－灰－青

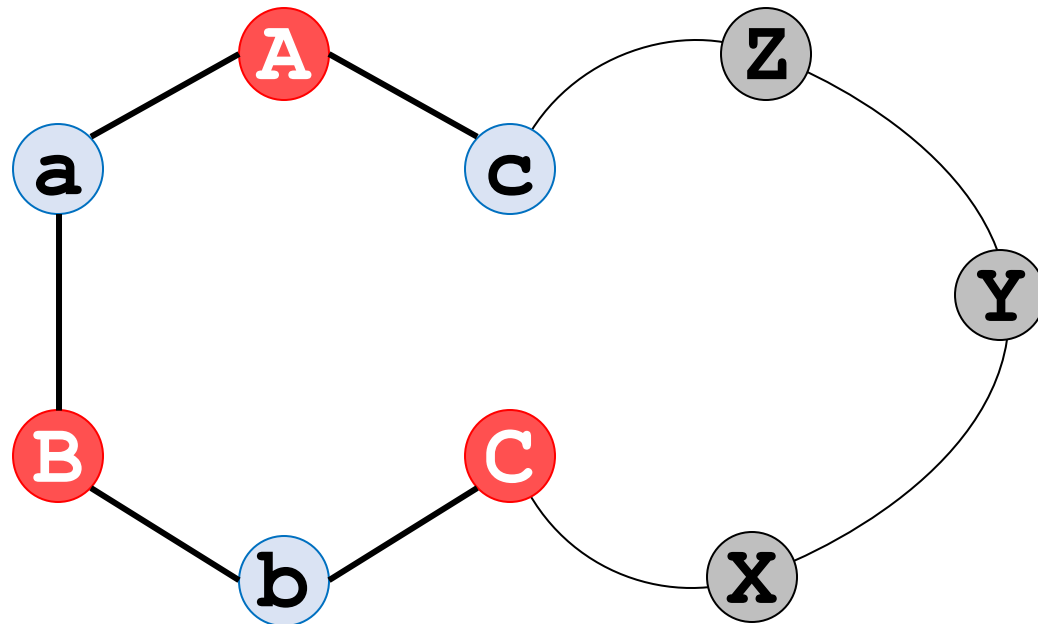
例

- 便宜上頂点には番号ではなく文字を割り振る
- $\mathbf{a} = (A, A, B, B, B, B, C, C, C, X, X, X, Y, Z, Z)$
- $\mathbf{b} = (a, a, b, b, c, c, d, d, e, e, e, X, Y, Y, Z)$
- 以下のように分類される

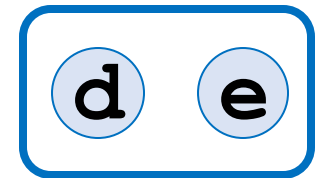


例

- $\mathbf{a} = (A, A, B, B, B, B, C, C, C, X, X, X, Y, Z, Z)$
- $\mathbf{b} = (a, a, b, b, c, c, d, d, e, e, e, X, Y, Y, Z)$
- 先程と同様にサイクルを作ろうとしてみる
- 赤 か 青 のどちらかがあまる

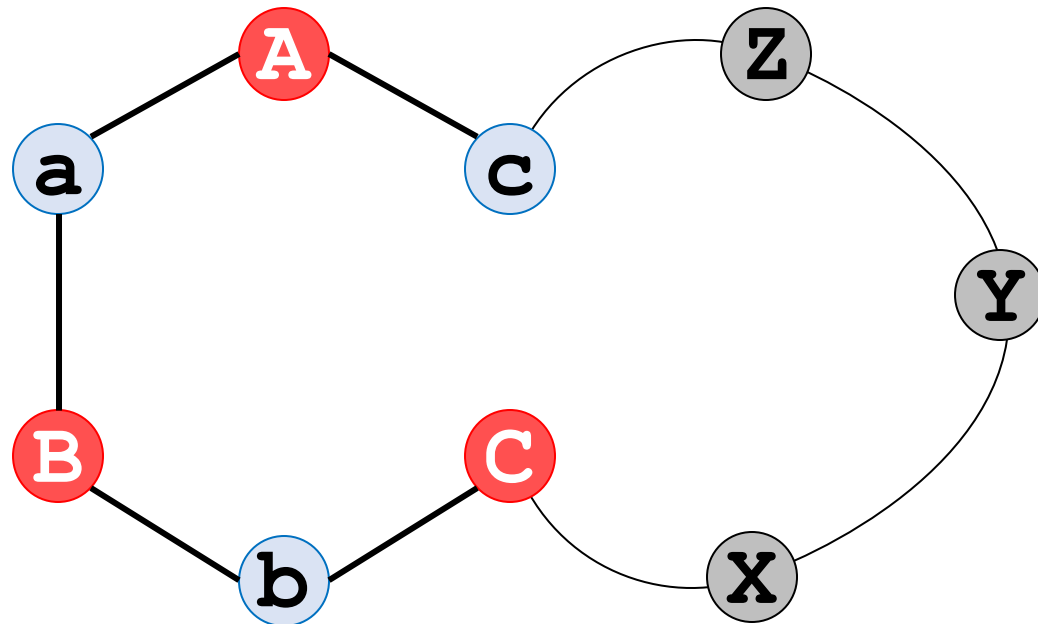


あまり

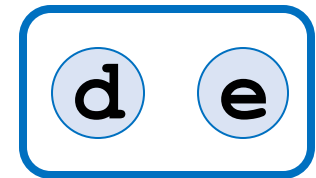


例

- $\mathbf{a} = (A, A, B, B, B, B, C, C, C, X, X, X, Y, Z, Z)$
- $\mathbf{b} = (a, a, b, b, c, c, d, d, e, e, e, X, Y, Y, Z)$
- 数列の使用済みのところを消してみる
 - $\mathbf{a} \rightarrow (B, B, C, X, X, Z), \mathbf{b} \rightarrow (d, d, e, e, e, Y)$



あまり



まとめ

- 橋がない連結グラフを構築する
- 頂点を 3 種類に分類し極大なサイクルを作り、余った頂点たちを適当にくっつける
- 適切に向き付けすると強連結グラフになる